LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
01.07.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 9

Aufgabe 1. **(i)** Sei $x_0 := (x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in \mathbb{R}^3$. Zeige, dass $\{x_0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist.

[1.5 Punkte]

(i) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen in $\mathbb{R}^n$ (d.h., U_i ist offen für jedes $i \in I$). Zeige, dass deren Vereinigung

$$\bigcup_{i\in I} U_i := \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{i\in I}\big(x \in U_i\big)\big\}$$

offen ist.

[1.5 Punkte]

(ii) Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen in $\mathbb{R}^n$ (d.h., F_i ist abgeschlossen für jedes $i \in I$). Zeige, dass deren Schnitt

$$\bigcap_{i\in I} F_i := \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{i\in I}\big(x \in F_i\big)\big\}$$

abgeschlossen ist.

[1 Punkt]

Aufgabe 2. Seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$f(x, y, z) := e^{xyz},$$

$$g(x, y, z) := \sin(xyz),$$

$$h(x, y, z) := xz + yz + xy.$$

Bestimme die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}.$$

[4 Punkte]

Aufgabe 3. Sei die Funktion $f : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$f(x, y) := x^y,$$

für jedes $x \in (0, +\infty)$ und jedes $y \in \mathbb{R}$.
(i) Zeige, dass die Menge $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.
[1 Punkt]
(ii) Bestimme die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
[Hinweis: Benutze die Gleichheit $x^y = e^{y \ln x}$.]
[3 Punkte]

Aufgabe 4. **(i)** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x, y, z) := e^{-2x} \cos(yz),$$

für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Bestimme den Vektor

$$(\mathrm{grad} f)(P),$$

wobei $P := (1, \pi, \pi)$.
[2 Punkte]
(i) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$g(x, y, z) := e^{3x+4y} \cos(5z),$$

für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Zeige, dass g die Laplace-Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0,$$

für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
[2 Punkte]

Abgabe. Montag 08. Juli 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 08. Juli 2019, in der Übung.