Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
24.06.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 8

Aufgabe 1. Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^n$ differenziarbare Kurven, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenziarbare Funktion. Zeige:

(i) Die Summe $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})(t) := \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{y}(t),$$

für jedes $t \in I$, ist eine differenziarbare Kurve, und für jedes $t_0 \in I$ gilt:

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})'(t_0) = \boldsymbol{x}'(t_0) + \boldsymbol{y}'(t_0).$$

[1 Punkt]

(ii) Das Produkt $\lambda \boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(\lambda \boldsymbol{x})(t) := \lambda \boldsymbol{x}(t),$$

für jedes $t \in I$, ist eine differenziarbare Kurve, und für jedes $t_0 \in I$ gilt:

$$(\lambda \boldsymbol{x})'(t_0) = \lambda \boldsymbol{x}'(t_0).$$

[1 Punkt]

(iii) Das Produkt $\boldsymbol{x}^2 : I \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(\boldsymbol{x}^2)(t) := \langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t) \rangle,$$

für jedes $t \in I$, ist eine differenziarbare Funktion, und für jedes $t_0 \in I$ gilt:

$$(\boldsymbol{x}^2)'(t_0) = 2\langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{x}'(t_0) \rangle.$$

[1 Punkt]

(iv) Das Produkt $f\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$(f\boldsymbol{x})(t) := f(t)\boldsymbol{x}(t),$$

für jedes $t \in I$, ist eine differenziarbare Kurve, und für jedes $t_0 \in I$ gilt:

$$(f\boldsymbol{x})'(t_0) = f'(t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + f(t_0)\boldsymbol{x}'(t_0).$$

[1 Punkt]

Aufgabe 2. Sei $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenziarbare Kurve mit einer differenziarbaren Ableitung $\boldsymbol{x}'$. Zeige, das folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für jedes $t \in I$, $v_{\boldsymbol{x}}(t) = r$, für ein $r \geq 0$.

(b) Für jedes $t \in I$ gilt $\boldsymbol{x}''(t) \perp \boldsymbol{x}'(t)$.

[4 Punkte]

Aufgabe 3. Sei $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenziarbare Kurve mit einer differenziarbaren Ableitung $\boldsymbol{x}'$, und sei $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $w \neq \mathbf{0}$. Es gelte für jedes $t \in I$:

$$\langle \boldsymbol{x}(t), w \rangle = t.$$

Zeige:

(i) $\boldsymbol{x}'(t) \neq \mathbf{0}$, für jedes $t \in I$.

[1 Punkt]

(ii) Der Winkel zwischen $\boldsymbol{x}'(t)$ und w ist Konstant, d.h. wenn für jedes $t \in I$ gilt

$$\frac{\langle \boldsymbol{x}'(t), w \rangle}{|\boldsymbol{x}'(t)||w|} = c,$$

für ein $c \in \mathbb{R}$, dann gilt für jedes $t \in I$: $\boldsymbol{x}''(t) \perp \boldsymbol{x}'(t)$.

[3 Punkte]

Aufgabe 4. **(i)** Sei $\boldsymbol{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ die Kurve, die durch

$$\boldsymbol{x}(t) := (\cos t, \sin t, t),$$

für jedes $t \in [0,1]$, definiert ist. Berechne die Länge $L_{0,1}(\boldsymbol{x})$.

[1 Punkt]

(ii) Sei $\boldsymbol{y} : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve, die durch

$$\boldsymbol{y}(t) := (t, \ln t),$$

für jedes $t \in [1,2]$, definiert ist. Berechne die Länge $L_{1,2}(\boldsymbol{y})$.

Hinweis: Substituiere $u^2 = 1 + t^2$ um das Integral zu berechnen und verwende die Gleichung

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right).$$

[3 Punkte]

Abgabe. Montag 01. Juli 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 01. Juli 2019, in der Übung.