Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
17.06.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum und seien $x, y \in X$. Zeige, dass folgendes gilt:

(i) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\big)$.
[1 Punkt]
(ii) $x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall_{z\in X}\big(\langle x, z\rangle = 0\big)$.
[2 Punkte]
(iii) $\forall_{z\in X}\big(\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle\big) \Rightarrow x = y$.
[1 Punkt]

Aufgabe 2. Seien $n \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Des weiteren setze

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

und

$$d(x,y) := |x - y| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

(i) Zeige, dass $\langle x, y\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.
[1 Punkt]
(ii) Zeige, dass $|x|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.
[Tipp: Benutze die Cauchy-Ungleichung]
[2 Punkte]
(iii) Zeige, dass $d(x,y)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.
[1 Punkt]

Aufgabe 3. Seien $n \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass folgendes gilt:
(i) Für $x \neq \mathbf{0}$:

$$\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1.$$

[1 Punkt]
(ii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
[Tipp: Benutze die Dreiecksungleichung für die Euklidische Norm $|.|$]
[2 Punkte]
(iii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$.
[1 Punkt]

Aufgabe 4. Für $n \geq 1$ und $m \geq 1$, zeige folgendes:
(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, sodass $x \perp y$, dann gilt:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

[1 Punkt]
(ii) Seien $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, sodass für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$

$$x_i \neq \mathbf{0},$$

und, falls $i \neq j$,

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0$$

gilt.
Des weiteren seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \mathbf{0}.$$

Dann folgt $a_1 = \ldots = a_m = 0$.
[3 Punkte]

Abgabe. Montag 23. Juni 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 23. Juni 2019, in der Übung.