LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
03.06.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 5

Aufgabe 1. Es sei für $\theta \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix gegeben:

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(i) Zeige, dass $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ gilt.
[1 Punkt]
(ii) Zeige, dass die Matrix $R(\theta)$ invertierbar ist und bestimme das Inverse.
[2 Punkte]
(iii) Zeige:

$$R^2(\theta) := \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

[1 Punkt]

Aufgabe 2. Seien $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgendes gilt:
(i) $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
[0.5 Punkt]
(ii) Sei $T_A = \mathbf{0}$, dann $A = \mathbf{0}_{mn}$.
[0.5 Punkt]
(iii) $T_{A+B} = T_A + T_B$.
[0.5 Punkt]
(iv) $T_{a \cdot A} = aT_A$.
[0.5 Punkt]
(v) $T_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n}$ und $T_{\mathbf{0}_{mn}} = \mathbf{0}$.
[0.5 Punkt]
(vi) Sei $C \in M_{n,l}(\mathbb{R})$, dann $T_{AC} = T_A \circ T_C$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^l \arrow[r, "T_C"] \arrow[rr, bend right, "T_{AC}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

[0.5 Punkt]

(vii) Sei A invertierbar, dann ist T_A invertierbar und es gilt $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.

[0.5 Punkt]

(viii) Die Funktion $\mathcal{T} : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, welche durch $A \mapsto T_A$ gegeben ist, ist eine lineare Abbildung.

[0.5 Punkt]

Aufgabe 3. Seien $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgendes gilt:

(i) $A_{S+T} = A_S + A_T$.

[2 Punkte]

(ii) $A_{\lambda T} = \lambda A_T$.

[2 Punkte]

Aufgabe 4. **(i)** Sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$T(x) = xw,$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

[2 Punkte]

(ii) Sei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, für welche $S(e_1) := (3, 1, -4)$ und $S(e_2) := (-5, 7, -8)$ gilt, wobei $e_1 := (1, 0)$ und $e_2 := (0, 1)$. Bestimme die zu S gehörende Matrix.

[2 Punkte]

Abgabe. Montag 17. Juni 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 17. Juni 2019, in der Übung.