LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
20.05.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 3

Aufgabe 1. Seien X, Y Vektorräume und sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von X für $n \geq 1$.
(i) Die Funktion $f_B : X \to \mathbb{R}^n$, welche durch

$$f_B(x) := (a_1, \ldots, a_n), \qquad x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

gegeben ist, ist eine lineare Abbildung.
[1 Punkt]

(ii) Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Funktion $\mathtt{pr}_i^B : X \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\mathtt{pr}_i^B(x) := a_i, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

gegeben ist, eine lineare Abbildung.
[1 Punkt]

(iii) Die Funktion $\mathtt{pr}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\mathtt{pr}_2(a, b, c) := b, \qquad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$$

gegeben ist, ist eine lineare Abbildung.
[1 Punkt]

(iv) Seien $f, g \in \mathcal{L}(X, Y)$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $f + g \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $a \cdot f \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt, wobei

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad x \in X,$$
$$(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x), \qquad x \in X.$$

[1 Punkt]

Aufgabe 2. Seien X, Y, Z Vektorräume, $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $g \in \mathcal{L}(Y,Z)$.
(i) Die Komposition $g \circ f$ liegt in $\mathcal{L}(X,Z)$, wobei $g \circ f : X \to Z$ durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \qquad x \in X$$

definiert wird.
[1 Punkt]
(ii) Definiere $\mathrm{id}_X : X \to X$ durch $\mathrm{id}_X(x) := x$ für jedes $x \in X$. Dann gilt $\mathrm{id}_X \in \mathcal{L}(X)$.
[0.5 Punkt]
(iii) Die konstante Funktion $\overline{\mathbf{0}} : X \to Y$, $x \mapsto \mathbf{0}$, liegt in $\mathcal{L}(X,Y)$.
[0.5 Punkt]
(iv) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
[0.5 Punkt]
(v) Sei $x \in X$, dann gilt $f(-x) = -f(x)$.
[0.5 Punkt]
(vi) Seien $n \geq 1$, $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ und $x_1, \dots x_n \in X$, dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

[1 Punkt]

Aufgabe 3. Seien X, Y Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(X,Y)$.
(i) Angenommen, f erfülle die folgende Eigenschaft:
Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ linear unabhängig in X, dann ist $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ linear unabhängig in Y - für alle $n \geq 1$ und $x_1, \dots, x_n \in X$.
Zeige, dass f injektiv ist.
[2 Punkte]
(ii) Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathtt{Ker}(f) &:= \big\{x \in X \mid f(x) = \mathbf{0}\big\}, \\ \mathtt{Im}(f) &:= \big\{y \in Y \mid \exists_{x \in X}\big(f(x) = y\big)\big\}. \end{aligned}$$

Zeige, dass gilt:
(a) $\mathtt{Ker}(f) \preceq X$ und $\mathtt{Im}(f) \preceq Y$.
[1 Punkt]
(b) f ist genau dann injektiv, wenn $\mathtt{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ gilt.
[1 Punkt]

Aufgabe 4. Gegeben seien die Vektorräume

$$C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\},$$

$$D(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\},$$

und die Funktion $\int : C(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$, definiert durch die Vorschrift

$$f \mapsto \int f,$$

$$\left(\int f\right)(x) := \int_0^x f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Erkläre, weshalb $\int f \in D(\mathbb{R})$ gilt.
[1 Punkt]

(ii) Zeige, dass $\int$ eine lineare Abbildung ist.
[2 Punkte]

(iii) Zeige, dass $\int$ injektiv ist.
[1 Punkte]

Abgabe. Montag 27. Mai 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 27. Mai 2019, in der Übung.