Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
13.05.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $n \geq 1$ und sei $M := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums X. Beweise die folgenden Behauptungen.

(i) Für jedes $x \in X$, sei

$$x, v_1, \ldots, v_n$$

eine linear abhängige Teilmenge von X ist. Dann ist M eine Basis von X.
[1 Punkt]

(ii) Sei $\dim(X) = n$, und sei $B := \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von X. Dann ist B eine Basis von X.
[1 Punkt]

(iii) Sei Y ein Untervektorraum von X, wobei $\dim(Y) = \dim(X) = n$. Dann gilt $Y = X$.
[1 Punkt]

(iv) Seien $\dim(X) = n$, $1 \leq r < n$, und sei $\{w_1, \ldots, w_r\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von X. Dann existieren in X Elemente $v_{r+1}, \ldots, v_n$, sodass

$$\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$$

eine Basis von X ist.
[1 Punkt]

Aufgabe 2. Sei X ein Vektorraum und seien $Y, Z \preceq X$, wobei für jedes $x \in X$ eindeutig bestimmte Vektoren $y \in Y$ und $z \in Z$ existieren, sodass

$$x = y + z$$

gilt. Wir schreiben $X := Y \oplus Z$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $X = Y \oplus Z$.

(b) $X = Y + Z$ und $Y \cap Z = \{\mathbf{0}\}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) **[2 Punkte]**,

(b) $\Rightarrow$ (a) **[2 Punkte]**

Aufgabe 3. Sei X ein Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\dim(X) = n$.

(i) Für jeden Untervektorraum $Y \preceq X$ existiert ein Untervektorraum $Z \preceq X$, sodass $X = Y \oplus Z$ gilt.
[2 Punkte]

(ii) Seien $Y, Z \preceq X$, wobei $X = Y \oplus Z$. Dann gilt die folgende Gleichheit: $\dim(X) = \dim(Y) + \dim(Z)$.
[2 Punkte]

Aufgabe 4. Sei Y eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums X und sei $x_0 \in X$. Falls $x_0 \notin \langle Y \rangle$ gilt, dann ist $Y \cup \{x_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von X.
[4 Punkte]

Abgabe. Montag 20. Mai 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 20. Mai 2019, in der Übung.