Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
17.07.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 13 (Probeklausur)

Aufgabe 1. Sei $M_2(\mathbb{R})$ die Menge der Matrizen mit reelwertigen Einträgen von der Form

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(i) Berechne die folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2018 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2019 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =?$$

$$\sqrt{2019} \begin{bmatrix} \sqrt{2019} & 0 \\ 0 & \sqrt{2019} \end{bmatrix} =?$$

(ii) Finde eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ und bestimme die Dimension.

(iii) Zeige, dass die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. Für $\theta \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

gegeben.

(i) Bestimme $\mathtt{Det}(A)$.

(ii) Ist A invertierbar? Falls ja, bestimme A^{-1} und $\mathtt{Det}(A^{-1})$.

(iii) Beweise, dass die Vektoren

$$(\cos\theta, \sin\theta), \quad (-\sin\theta, \cos\theta)$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Die Kurve $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\boldsymbol{x}(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 3t),$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$.
(i) Bestimme $\boldsymbol{x}'(t)$, wobei $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Bestimme $|\boldsymbol{x}'(t)|$, wobei $t \in \mathbb{R}$.
(iii) Bestimme die Länge $L_{1,3}(\boldsymbol{x})$ der Kurve $\boldsymbol{x}$ zwischen $t = 1$ und $t = 3$.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = e^{9x+2y},$$

für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x, y) = \sin(4x + y),$$

für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sei $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve, für welche gilt:

$$\boldsymbol{x}(0) = (0, 0),$$

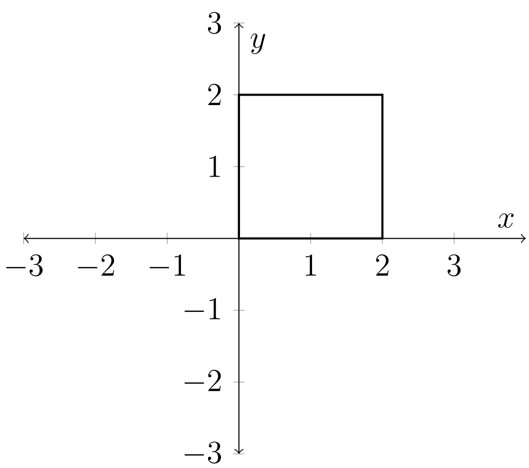
$$(f \circ \boldsymbol{x})'(0) = 2,$$

und

$$(g \circ \boldsymbol{x})'(0) = 1.$$

(i) Bestimme $(\mathrm{grad} f)(0, 0)$ und $(\mathrm{grad} g)(0, 0)$.
(ii) Bestimme $\boldsymbol{x}'(0)$.

Aufgabe 5. Seien $O = (0, 0), P = (2, 0), Q = (2, 2)$ und $R = (0, 2)$.



Seien

$$\boldsymbol{x}_1 \text{ der Geradenabschnitt von } O \text{ nach } P,$$

$$\boldsymbol{x}_2 \text{ der Geradenabschnitt von } P \text{ nach } Q,$$

$$\boldsymbol{x}_3 \text{ der Geradenabschnitt von } Q \text{ nach } R,$$

$$\boldsymbol{x}_4 \text{ der Geradenabschnitt von } R \text{ nach } O,$$

und sei

$$\boldsymbol{x}_5 \text{ der Geradenabschnitt von } Q \text{ nach } O.$$

Sei F ein differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, sodass

$$\int_{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_5)} F = 2019 \quad \& \quad \int_{(-\boldsymbol{x}_5,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)} F = -2018$$

gilt. Bestimme

$$\int_{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)} F.$$

Aufgabe 6. Seien $O = (0,0), P = (2,0), Q = (2,2), R = (0,2)$ und seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ und $\boldsymbol{x}_4$ die differenzierbaren Kurven aus Aufgabe 5. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y) = (xy, xy),$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Unter Verwendung des Satzes von Green, bestimme

$$\int_{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)} F.$$

(ii) Unter Verwendung der Definition eines Kurvenintegrals, bestimme

$$\int_{\boldsymbol{x}_1} F + \int_{\boldsymbol{x}_2} F + \int_{\boldsymbol{x}_3} F + \int_{\boldsymbol{x}_4} F.$$

Beschprechung. Montag 22. Juli 2019, in der Übung.