Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
17.07.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld auf U. Zudem soll $F = \mathrm{grad}V$ für eine differenzierbare Funktion $V : U \to \mathbb{R}$ gelten.
(a) Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} : [a, b] \to U$ differenzierbare Kurven in U mit $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{y}(a)$ und $\boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{y}(b)$. Dann gilt

$$\int_{\boldsymbol{y}} F = \int_{\boldsymbol{x}} F.$$

[2 Punkte]

(b) Sei $\boldsymbol{z} : [a, b] \to U$ ein geschlossene differenzierbare Kurve in U, d.h., $\boldsymbol{z}(a) = \boldsymbol{z}(b)$, dann gilt

$$\int_{\boldsymbol{z}} F = 0.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 2. Sei $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$V(x, y, z) := -\frac{k}{|(x, y, z)|},$$

für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und ein $k \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgendes gilt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z)\right) = \frac{k}{|(x, y, z)|^3}(x, y, z).$$

[4 Punkte]

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{R} := [-1,1] \times [0,2]$ und sei $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := xy,$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimme

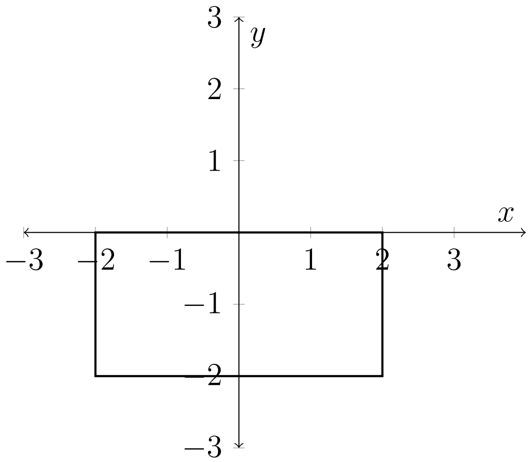
$$\iint_{\mathcal{R}} f.$$

[4 Punkte]

Aufgabe 4. Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(x,y) = \big(3x, y^2\big),$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Benutze den Satz von Green um das Integral von F über das folgende Rechteck zu bestimmen:



[4 Punkte]

Beschprechung. Montag 22. Juli 2019, in der Übung.