LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 19
08.07.2019

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wobei

$$(\mathrm{grad} f)(1,1,1) = (5,2,1).$$

Sei $\boldsymbol{x} : (0.5, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\boldsymbol{x}(t) = \big(t^2, t^{-3}, t\big),$$

für jedes $t \in (0.5, +\infty)$. Bestimme

$$\frac{df(\boldsymbol{x}(t))}{dt} \quad \text{in} \quad t = 1.$$

[4 Punkte]

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, wobei für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(tx, ty) = t^2 f(x,y).$$

Benutze eine geeignete differenzierbare Kurve $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

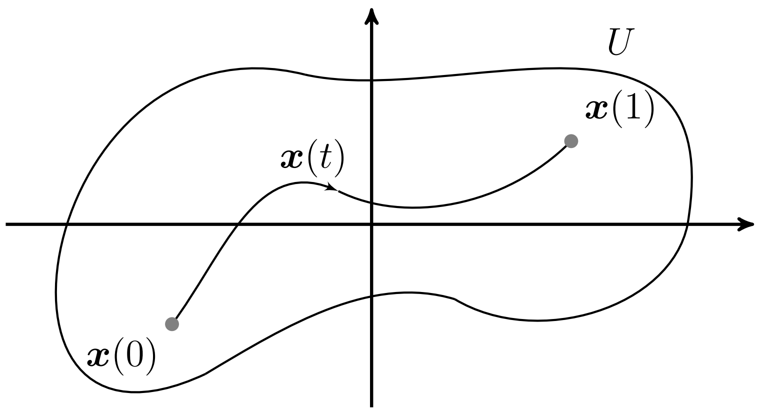
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\boldsymbol{x}"] \arrow[dr, "f \circ \boldsymbol{x}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

und wende die Kettenregel an, um zu zeigen:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y),$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}$.
[4 Punkte]

Aufgabe 3. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sodass es für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in U$ eine differenzierbare Kurve $\boldsymbol{x} : [0,1] \to U$ gibt, für welche $\boldsymbol{x}(0) = x_0$ and $\boldsymbol{x}(1) = x_1$ gilt.



Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf U, wobei

$$(\mathrm{grad} f)(x) = \mathbf{0},$$

für jedes $x \in U$. Dann ist f konstant auf U.

[Hinweis: Wähle $x_0, x_1 \in U$ beliebig und zeige mithilfe der Kettenregel, dass $f(x_0) = f(x_1)$ gilt.]

[4 Punkte]

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Sei $P \in \mathbb{R}^3$ und sei $g_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_P(t) = f(tP),$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$g_P{}'(t) = \big\langle (\mathrm{grad} f)(tP), P \big\rangle$$

gilt.

[2 Punkte]

(ii) Angenommen, für jedes $t \in \mathbb{R}$ aund für jedes $P \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$f(tP) = tf(P).$$

Zeige, dass dann für jedes $P \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$f(P) = \big\langle (\mathrm{grad} f)(\mathbf{0}), P \big\rangle.$$

[2 Punkte]

Abgabe. Montag 15. Juli 2019, in der Übung.

Beschprechung. Montag 15. Juli 2019, in der Übung.