

# Mathematik für Naturwissenschaftler II

Priv. Doz. Dr. Iosif Petrakis

Ludwig-Maximilians-Universität München  
Sommersemester 2021

## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Vektorräume und lineare Abbildungen	1
1.1. Vektorräume	1
1.2. Unterräume	4
1.3. Lineare Abhängigkeit	5
1.4. Endlichdimensionale Vektorräume	8
1.5. Lineare Abbildungen	12
1.6. Lineare Isomorphismen	16
1.7. Der Matrizenraum	19
1.8. Matrizen und lineare Abbildungen	23
1.9. Determinante einer Matrix	27
1.10. Euklidische Vektorräume	31
1.11. Der Minkowski-Raum	36
Kapitel 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$	41
2.1. Offene Mengen	41
2.2. Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$	47
2.3. Stetigkeit von Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	49
2.4. Stetigkeit und Linearität	53
2.5. Kurven im $\mathbb{R}^n$	54
2.6. Die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve	60
2.7. Partielle Ableitungen	63
2.8. Die Kettenregel	68
2.9. Kurvenintegral	73
2.10. Gradientenfelder	79
2.11. Integrale, die von einem Parameter abhängen	82
2.12. Doppelintegrale	87
2.13. Der Satz von Green	91
2.14. Totale Differenzierbarkeit	94
Literaturverzeichnis	101



## KAPITEL 1

# Vektorräume und lineare Abbildungen

In diesem Kapitel werden wir uns mit den fundamentalen Eigenschaften der Vektorräumen (auch lineare Räume genannt) und mit den linearen Abbildungen zwischen ihnen beschäftigen. Ein Vektorraum ist eine Menge ausgestattet mit einer linearen Struktur, und eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen ist eine Funktion zwischen deren entsprechenden Mengen, die die lineare Struktur der Vektorräume erhält.

### 1.1. Vektorräume

DEFINITION 1.1.1. Ein *Vektorraum*, oder ein *linearer Raum*, über  $\mathbb{R}$  ist eine Struktur  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$ , wobei  $X$  ist eine Menge,  $\mathbf{0} \in X$ , und  $+, \cdot$  sind Funktionen

$$+: X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y; \quad x \in X, y \in X,$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \quad (a, x) \mapsto a \cdot x; \quad a \in \mathbb{R}, x \in X,$$

sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(VR_1) \quad \forall x, y, z \in X ((x + y) + z = x + (y + z)).$$

$$(VR_2) \quad \forall x \in X (x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x).$$

$$(VR_3) \quad \forall x \in X \exists y \in X (x + y = \mathbf{0}).$$

$$(VR_4) \quad \forall x, y \in X (x + y = y + x).$$

$$(VR_5) \quad \forall x, y \in X \forall a \in \mathbb{R} (a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y).$$

$$(VR_6) \quad \forall x \in X \forall a, b \in \mathbb{R} ((a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x).$$

$$(VR_7) \quad \forall x \in X \forall a, b \in \mathbb{R} ((ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)).$$

$$(VR_8) \quad \forall x \in X (1 \cdot x = x).$$

Der Einfachheit halber schreiben wir  $ax$  statt  $a \cdot x$ . Das Triplett  $(+, \mathbf{0}, \cdot)$

nennt man die *Signatur* des Vektorraumes  $\mathcal{V}$ . Wenn wir statt  $\mathbb{R}$ , einen beliebigen Körper<sup>1</sup>  $\mathbb{F}$  betrachten, heißt die entsprechende Struktur ein Vektorraum über  $\mathbb{F}$ . Also, ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  wird auch reeller Vektorraum genannt, und ein Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  heißt ein komplexer Vektorraum. Wenn  $\mathcal{V}$  ein Vektorraum ist, heißen die Elementen von  $X$  Vektoren. Ein Vektorraum heißt nicht-trivial, wenn er einen Vektor  $x$  enthält, der ungleich  $\mathbf{0}$  ist. Wenn nicht anders angegeben, sind die Vektorräume, die hier betrachtet werden, reelle Vektorräume. Wenn die lineare Struktur über  $X$  klar ist, verwenden wir der Einfachheit halber  $X$  um den Vektorraum  $\mathcal{V}$  zu bezeichnen.

Es wird daran erinnert, dass wenn  $X, Y$  Mengen sind, dann

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \ \& \ y \in Y\},$$

und wenn  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ , dann

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \ \& \ y = y'.$$

BEISPIEL 1.1.2. Sei die Struktur  $\mathcal{R}^n := (\mathbb{R}^n; +, \mathbf{0}, \cdot)$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R} \ \& \ \dots \ \& \ x_n \in \mathbb{R}\}, \\ (x_1, \dots, x_n) &= (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_n = y_n, \\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \mathbf{0} &:= (0, \dots, 0), \\ a \cdot (x_1, \dots, x_n) &:= (ax_1, \dots, ax_n). \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass  $\mathcal{R}^n$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist, und ebenso ist  $\mathcal{Q}^n := (\mathbb{Q}^n; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Q}$ , und  $\mathcal{C}^n := (\mathbb{C}^n; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .

---

<sup>1</sup>Ein *Körper* ist eine Struktur  $(\mathbb{F}; +, \mathbf{0}, \cdot, \mathbf{1})$ , wobei  $\mathbb{F}$  ist eine Menge,  $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{F}$ ,  $+$  :  $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ , und  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  sodass zusammen mit den Eigenschaften (VR<sub>1</sub>) – (VR<sub>4</sub>) folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\forall_{x, y, z \in \mathbb{F}} (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z).$$

$$\forall_{x, y, z \in \mathbb{F}} (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z).$$

$$\forall_{x, y \in \mathbb{F}} (x \cdot y = y \cdot x).$$

$$\forall_{x \in \mathbb{F}} (\mathbf{1} \cdot x = x).$$

$$\forall_{x \in \mathbb{F}} (x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists_{y \in \mathbb{F}} (x \cdot y = \mathbf{1})).$$

Man sieht sofort, dass die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und die Komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  eine Körper Struktur haben. Eigentlich, ist  $\mathbb{Q}$  ein *Unterkörper* von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$  ist ein Unterkörper von  $\mathbb{C}$  d.h. die Körper-Signatur  $(+, \mathbf{0}, \cdot, \mathbf{1})$  von  $\mathbb{Q}$  ist übernommen von der Körper-Signatur von  $\mathbb{R}$ , welche wiederum von der Körper-Signatur von  $\mathbb{C}$  übernommen wird.

Wenn  $\mathbb{F}(X, Y)$  die Menge aller Funktionen von  $X$  nach  $Y$  ist und  $f, g \in \mathbb{F}(X, Y)$ , dann

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in X (f(x) = g(x)).$$

BEISPIEL 1.1.3. Seien  $X$  eine Menge und  $\mathbb{F}(X)$  die Menge aller Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$ . Wir definieren die Funktionen  $f + g$ ,  $\bar{0}^X$  und  $a \cdot f$ , wobei  $a \in \mathbb{R}$ , durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x); \quad x \in X,$$

$$\bar{0}^X(x) := 0; \quad x \in X,$$

$$(a \cdot f)(x) := af(x); \quad x \in X.$$

Die Struktur  $\mathcal{F}(X) := (\mathbb{F}(X); +, \bar{0}^X, \cdot)$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

Das Beispiel 1.1.3 zeigt, dass es möglich ist ein mathematisches Objekt als einen Vektor zu betrachten, obwohl keine unmittelbare geometrische Intuition damit assoziiert wird. Wenn jedoch

$$\mathbf{n} := \{0, 1, \dots, n-1\},$$

kann ein Element von  $\mathbb{R}^n$  mit einer Funktion  $f: \mathbf{n} \rightarrow \mathbb{R}$  identifiziert werden, und dann ist das Beispiel 1.1.2 ein Spezialfall von Beispiel 1.1.3.

Wenn  $f, g \in \mathbb{F}(X)$  und  $a \in \mathbb{R}$ , definieren wir

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X (f(x) \leq g(x)),$$

$$f \leq a \Leftrightarrow f \leq \bar{a}^X \Leftrightarrow \forall x \in X (f(x) \leq a),$$

wobei  $\bar{a}^X(x) := a$ , für jedes  $x \in X$ .

BEMERKUNG 1.1.4. Sei  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum,  $a, b \in \mathbb{R}$ , und seien  $x, y, z, w \in X$ . Es gelten folgenden Eigenschaften:

(i) Wenn  $z = w$  und  $x = y$ , dann  $z + x = w + y$ .

(ii) Wenn  $x = y$  und  $a = b$ , dann  $a \cdot x = b \cdot y$ .

(iii) Wenn  $x + y = x + z = \mathbf{0}$ , dann  $y = z$ .

(iv)  $0 \cdot x = \mathbf{0}$ .

(v)  $(-1) \cdot x = -x$ , wobei, wegen (iii),  $-x$  das einzige Element  $y$  von  $X$  in Bedingung (VR<sub>3</sub>) ist, sodass  $x + y = \mathbf{0}$ .

(vi) Wenn  $x \neq \mathbf{0}$  und  $a \cdot x = \mathbf{0}$ , dann  $a = 0$ .

BEWEIS 1.1.5. Aufgabe.

## 1.2. Unterräume

DEFINITION 1.2.1. Sei  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum, und  $Y \subseteq X$  mit den folgenden Bedingungen:

- (i)  $\forall y, y' \in Y (y + y' \in Y)$ ,
- (ii)  $\mathbf{0} \in Y$ ,
- (iii)  $\forall y \in Y \forall a \in \mathbb{R} (a \cdot y \in Y)$ .

Dann heißt die Struktur

$$\mathcal{V}|_Y := (Y, +|_{Y \times Y}, \mathbf{0}, \cdot|_{\mathbb{R} \times Y}),$$

wobei  $+|_{Y \times Y}$  ist die Beschränkung von  $+$  auf  $Y \times Y$  und  $\cdot|_{\mathbb{R} \times Y}$  von  $\cdot$  auf  $\mathbb{R} \times Y$ , ein *Untervektorraum* von  $\mathcal{V}$ , oder einfacher ein *Unterraum* von  $\mathcal{V}$ . Wir schreiben  $\mathcal{V}|_Y \preceq \mathcal{V}$  um zu bezeichnen, dass  $\mathcal{V}|_Y$  ein Unterraum von  $\mathcal{V}$  ist, obwohl wir wegen Einfachheit, auf den Unterraum  $\mathcal{V}|_Y$  hinweisend nur die Menge  $Y$  erwähnen, und dazu schreiben  $Y \preceq X$ . Wir bezeichnen durch  $\text{Unt}(\mathcal{V})$  die Menge aller Unterräume von  $\mathcal{V}$ .

Offensichtlich sind  $\{0\}$  und  $X$  Unterräume von  $X$ .

BEISPIEL 1.2.2. Wenn  $\mathbb{F}^*(X)$  die Menge aller beschränkten Funktionen aus  $\mathbb{F}(X)$  ist, d.h.

$$\mathbb{F}^*(X) = \{f \in \mathbb{F}(X) \mid \exists M > 0 \forall x \in X (|f(x)| \leq M)\},$$

dann ist  $\mathbb{F}^*(X)$  ein Unterraum von  $\mathbb{F}(X)$  (siehe Beispiel 1.1.3). Um es zu zeigen, seien  $f, g \in \mathbb{F}(X)$  und  $M_f > 0, M_g > 0$ , sodass  $|f| \leq M_f$  und  $|g| \leq M_g$ . Dann gilt  $|f + g| \leq M_f + M_g$  und  $|af| \leq (1 + |a|)M_f$ , wobei  $M_f + M_g > 0$  und  $(1 + |a|)M_f > 0$ . Hier wird daran erinnert, dass  $|f| \in \mathbb{F}(X)$  definiert durch  $|f|(x) := |f(x)|$ , für jedes  $x \in X$ .

BEISPIEL 1.2.3. Wenn  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum ist,  $n \geq 1$ , und seien  $x_1, \dots, x_n \in X$ , dann ist die Menge

$$\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle := \{a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \mid a_1 \in \mathbb{R} \ \& \ \dots \ \& \ a_n \in \mathbb{R}\}$$

ein Unterraum von  $\mathcal{V}$ . Wir nennen ein Element

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i := a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n x_n$$

von  $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$  eine *Linearkombination* von  $x_1, \dots, x_n$ , und den Vektorraum  $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$  die *lineare Hülle* von  $x_1, \dots, x_n$ . Wir schreiben auch  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  statt  $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$ .

Wenn  $e_1 := (1, 0)$ ,  $e_2 := (0, 1)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , dann gilt  $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ , weil  
 $(x, y) := x(1, 0) + (0, 1)y := xe_1 + ye_2$ .

SATZ 1.2.4. Sei  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum,  $Y \subseteq X$ , and seien  $U, V \preceq X$ .

- (i) Wenn  $U + V := \{u + v \mid u \in U \ \& \ v \in V\}$ , dann  $U + V \preceq X$ .
- (ii) Wenn  $U \cap V := \{x \in X \mid x \in U \ \& \ x \in V\}$ , dann  $U \cap V \preceq X$ .
- (iii) Wenn wir  $\langle Y \rangle$  wie folgt definieren

$$\langle Y \rangle := \bigcap \{U \preceq X \mid Y \subseteq U\} := \{x \in X \mid \forall U \preceq X (Y \subseteq U \Rightarrow x \in U)\}$$

dann ist  $\langle Y \rangle$  wohldefiniert (d.h. die Menge  $\{U \preceq X \mid Y \subseteq U\}$  ist nicht leer) und sie ist der kleinste Unterraum von  $X$ , der  $Y$  enthält.

- (iv) Wenn  $Y \neq \emptyset$ , dann

$$\langle Y \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i \mid n \geq 1 \ \& \ \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} (a_i \in \mathbb{R} \ \& \ y_i \in Y) \right\}.$$

BEWEIS. Aufgabe. □

Weil  $\emptyset \subseteq \{\mathbf{0}\}$ , gilt  $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{0}\}$ . Der Unterraum  $U + V$  von  $\mathcal{V}$  heißt die *Summe* von  $U$  und  $V$ . Durch Satz 1.2.4 ist die lineare Hülle  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  von  $x_1, \dots, x_n \in X$  der kleinste Vektorraum, der  $x_1, \dots, x_n$  enthält. Wenn  $X = \langle Y \rangle$ , sagen wir, dass  $Y$  den Vektorraum  $\mathcal{V}$  (oder  $X$ ) erzeugt, und die Elemente von  $Y$  werden Erzeuger von  $\mathcal{V}$  genannt.

### 1.3. Lineare Abhängigkeit

DEFINITION 1.3.1. Seien  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum,  $Y \subseteq X$ ,  $n \geq 1$ , und seien  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Die Vektoren  $x_1, \dots, x_n$  sind *linear abhängig*, wenn es  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_i \neq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sodass

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \mathbf{0},$$

d.h.

$$\exists_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \left( \exists_{i \in \{1, \dots, n\}} (a_i \neq 0) \ \& \ \sum_{i=1}^n a_i x_i = \mathbf{0} \right).$$

Wenn  $x_1, \dots, x_n$  linear abhängig sind, dann ist die Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine *linear abhängige* Teilmenge von  $X$ . Die Vektoren  $x_1, \dots, x_n$  sind *linear*



*unabhängig*, wenn sie nicht linear abhängig sind. Mit anderen Worten sind die Vektoren  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig, genau dann wenn aus  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \mathbf{0}$  stets folgt, dass  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , d.h. wenn eine Linearkombination von  $x_1, \dots, x_n$  nur dann  $\mathbf{0}$  sein kann, wenn alle Koeffizienten “verschwinden”. Die Menge  $Y$  ist eine *linear abhängige* Teilmenge von  $X$ , wenn

$$\exists_{n \geq 1} \exists_{y_1, \dots, y_n \in Y} \left( \{y_1, \dots, y_n\} \text{ ist eine linear abhängige Teilmenge von } X \right).$$

Die Menge  $Y$  ist eine *linear unabhängige* Teilmenge von  $X$ , wenn  $Y$  keine linear abhängige Teilmenge von  $X$  ist.

Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear abhängige Vektoren mit  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \mathbf{0}$  und  $a_i \neq 0$ . Dann gilt

$$x_i = \left( \frac{-a_1}{a_i} \right) x_1 + \dots + \left( \frac{-a_{i-1}}{a_i} \right) x_{i-1} + \left( \frac{-a_{i+1}}{a_i} \right) x_{i+1} + \dots + \left( \frac{-a_n}{a_i} \right) x_n,$$

d.h.  $x_i$  ist eine Linearkombination von  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ .

BEMERKUNG 1.3.2. Sei  $X$  ein Vektorraum und seien  $Y, Z \subseteq X$ .

(i) Die Vektoren  $x_1, \dots, x_n \in X$  sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\forall_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} (a_i = 0) \right).$$

(ii)  $Y$  ist eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$  genau dann, wenn

$$\forall_{n \geq 1} \forall_{y_1, \dots, y_n \in Y} \left( \{y_1, \dots, y_n\} \text{ ist linear unabhängig} \right).$$

(iii)  $\{\mathbf{0}\}$  und  $X$  sind linear abhängige Teilmengen von  $X$ .

(iv) Wenn  $x \neq \mathbf{0}$ , dann ist  $\{x\}$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$ .

(v) Die leere Menge  $\emptyset$  ist eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$ .

(vi) Wenn  $Y$  eine linear abhängige Teilmenge von  $X$  ist und  $Y \subseteq Z$ , dann ist  $Z$  eine linear abhängige Teilmenge von  $X$ .

(vii) Wenn  $Y$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$  ist und  $Z \subseteq Y$ , dann ist  $Z$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$ .

BEWEIS. (i) und (ii) Aufgabe.

(iii) Weil  $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ , ist  $\{\mathbf{0}\}$  eine linear abhängige Teilmenge von  $X$  ist. Also ist  $X$  eine linear abhängige Teilmenge von  $X$ .

- (iv) Es folgt aus Bemerkung 1.1.4(vi).
- (v) Angenommen  $\emptyset$  ist eine linear abhängige Teilmenge von  $X$ , d.h.

$$\exists_{n \geq 1} \exists_{y_1, \dots, y_n} \left( y_1 \in \emptyset \ \& \ \dots \ \& \ y_n \in \emptyset \ \& \ \{y_1, \dots, y_n\} \text{ ist linear abhängig} \right).$$

Aber die Annahme z.B.  $y_1 \in \emptyset$  ist unmöglich. Daraus folgt, dass  $\emptyset$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$  ist.

(vi) und (vii) Aufgabe. □

BEISPIEL 1.3.3. Die Vektoren  $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$

$$e_1 := (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e_n := (0, \dots, 0, 1)$$

sind linear unabhängig, weil für alle  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0 \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

BEISPIEL 1.3.4. Sei  $n \geq 1$ . Die Vektoren  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$

$$f_1(t) = e^t; \quad t \in \mathbb{R},$$

$$f_2(t) = e^{2t}; \quad t \in \mathbb{R},$$

.....

$$f_n(t) := e^{nt}; \quad t \in \mathbb{R}$$

sind linear unabhängig (Aufgabe).

BEMERKUNG 1.3.5. Seien  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum,  $n \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$ , und  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ .

(i) Wenn  $x_1, \dots, x_n \in X$  linear unabhängige Vektoren sind, dann gilt

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) \Rightarrow (a_1 = b_1 \ \& \ \dots \ \& \ a_n = b_n).$$

Darüber hinaus  $x_i \neq \mathbf{0}$ , für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

(ii) Angenommen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Die Vektoren  $x_1, \dots, x_n \in X$  sind linear unabhängig genau dann, wenn die Vektoren  $a_1 x_1, \dots, a_n x_n$  linear unabhängig sind.

BEWEIS. Aufgabe. □

### 1.4. Endlichdimensionale Vektorräume

DEFINITION 1.4.1. Sei  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum. Eine Teilmenge  $B$  von  $X$  ist eine *Basis* von  $\mathcal{V}$ , oder eine Basis von  $X$ , wenn gilt:

(Bas<sub>1</sub>)  $B$  ist eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$ , und

(Bas<sub>2</sub>)  $\langle B \rangle = X$ .

Wenn  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ , für  $n \geq 1$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  ist, dann ist  $\mathcal{V}$  ein *endlichdimensionaler* Vektorraum. Die Untervektorraum  $\{\mathbf{0}\}$  von  $X$  hat die leere Menge als Basis und  $\{\mathbf{0}\}$  ist auch ein endlichdimensionaler Vektorraum. Wenn  $B$  eine unendliche Basis von  $\mathcal{V}$  ist, dann ist  $\mathcal{V}$  ein *unendlichdimensionaler* Vektorraum.

BEISPIEL 1.4.2. Die Menge  $E_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ , wobei

$$e_1 := (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e_n := (0, 0, \dots, 0, 1),$$

ist eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ . Die Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  sind linear unabhängig und  $\langle E_n \rangle = \mathbb{R}^n$ , weil

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

$E_n$  wird die *kanonische* Basis von  $\mathbb{R}^n$  genannt. Also,  $\mathbb{R}^n$  ist ein endlichdimensionaler Vektorraum. Es gibt viele Basen von  $\mathbb{R}^n$  (warum?).

BEISPIEL 1.4.3. Nach Beispiel 1.3.4 ist die Menge

$$E := \{f_n \mid n \geq 1\},$$

$$f_n(t) = e^{nt}; \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1,$$

eine linear unabhängige Teilmenge von  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ , also ist  $E$  eine Basis von  $\langle E \rangle \subseteq \mathbb{F}(\mathbb{R})$ , und  $\langle E \rangle$  ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum.

COROLLAR 1.4.4. Sei  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum und sei  $x \in X$ . Wenn  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathcal{V}$  ist, dann gibt es eindeutig bestimmte  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , sodass gilt

$$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

BEWEIS. Nach Definition 1.4.1 und Bemerkung 1.3.5(i).  $\square$

Die eindeutig bestimmten  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit

$$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

heißen die *Koeffizienten* von  $x$  bezüglich  $B$ .

Als Nächstes zeigen wir, dass wir eine beliebige Anzahl von Elementen einer Endlichen Basis, gegen eine gleiche Anzahl von beliebigen unabhängigen Vektoren austauschen können.

LEMMA 1.4.5 (Austauschlemma (Steinitz)). *Seien  $n, m \geq 1$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$ , und seien  $w_1, \dots, w_m$  linear unabhängige Vektoren von  $X$ .*

(i) *Wenn  $m < n$ , dann gibt es  $u_{m+1}, \dots, u_n \in \{v_1, \dots, v_n\}$ , sodass*

$$\langle \{w_1, \dots, w_m, u_{m+1}, \dots, u_n\} \rangle = X.$$

(ii) *Wenn  $m = n$ , dann gilt  $\langle \{w_1, \dots, w_n\} \rangle = X$ .*

BEWEIS. (i) Nach Definition 1.4.1 gibt es  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit

$$w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Aus Bemerkung 1.3.5 folgt  $w_1 \neq \mathbf{0}$ , also gibt es  $a_i \neq 0$ , wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $i = 1$ . Wenn  $a_1 = 0$ , können wir die Elemente der Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$  permutieren, d.h. anders anordnen, sodass der erste Koeffizient in der Darstellung von  $w_1$  als eine Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$  ungleich Null ist. Also gilt

$$a_1 v_1 = w_1 - \sum_{i=2}^n a_i v_i \Leftrightarrow v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{a_1} v_i,$$

und

$$v_1 \in \langle \{w_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle,$$

und auch

$$\langle \{w_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = X.$$

Aus Induktionsvermutung für  $1 \leq r < m$  folgt (evtl. nach einer Permutation der Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$ )

$$\langle \{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\} \rangle = X.$$

Also gilt

$$w_{r+1} = b_1 w_1 + \dots + b_r w_r + c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n.$$

Nicht alle Terme  $c_{r+1}, \dots, c_n$  sind gleich 0, weil andernfalls  $w_{r+1}$  eine Linearkombination von  $w_1, \dots, w_r$  sein würde, was die Annahme der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $w_1, \dots, w_m$  widerspricht. Ohne Verlust der Allgemeinheit sei  $c_{r+1} \neq 0$ . Also gilt

$$c_{r+1}v_{r+1} = w_{r+1} - \left[ \sum_{i=1}^r b_i w_i + \sum_{j=r+2}^n c_j v_j \right] \Leftrightarrow$$

$$v_{r+1} = \frac{1}{c_{r+1}} w_{r+1} - \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{c_{r+1}} w_i - \sum_{j=r+2}^n \frac{c_j}{c_{r+1}} v_j,$$

und

$$v_{r+1} \in \langle \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\} \rangle,$$

und auch

$$\langle \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\} \rangle = X.$$

Nach  $m$  Schritte erhalten wir

$$\langle \{w_1, \dots, w_m, u_{m+1}, \dots, u_n\} \rangle = X.$$

(ii) Es folgt aus (i). □

**THEOREM 1.4.6.** *Seien  $0 < n < m$ , und sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$ . Wenn  $w_1, \dots, w_m \in X$ , dann sind die Vektoren  $w_1, \dots, w_m$  linear abhängig.*

**BEWEIS.** Angenommen die Vektoren  $w_1, \dots, w_m$  sind linear unabhängig. Daraus folgt, dass die Vektoren  $w_1, \dots, w_n$  linear unabhängig sind, und nach Lemma 1.4.5(ii) ist die Menge  $\{w_1, \dots, w_n\}$  eine Basis von  $X$ . Weil  $w_{n+1} \neq \mathbf{0}$ , gilt  $w_{n+1} \in \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ , was ein Widerspruch ist. Also, die Vektoren  $w_1, \dots, w_m$  sind linear abhängig. □

**COROLLAR 1.4.7.** *Wenn  $B_1, B_2$  endliche Basen von  $\mathcal{V}$  sind, dann enthalten  $B_1$  und  $B_2$  die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Anzahl heißt Kardinalität.*

**BEWEIS.** Wenn  $\mathcal{V}$  ein trivialer Vektorraum ist, dann  $B_1 = B_2 = \emptyset$ , also gilt  $|B_1| = |B_2| = 0$ , wobei  $|X|$  die Kardinalität von  $X$  ist. Sei  $\mathcal{V}$  ein nicht trivialer Vektorraum, und seien  $n, m \geq 1$  mit  $|B_1| = n$  und  $|B_2| = m$ . Wenn  $n < m$ , dann folgt aus Theorem 1.4.6, dass  $B_2$  eine linear abhängige Teilmenge von  $X$  ist, was ein Widerspruch ist. Also gilt  $n \geq m$ . Auf ähnliche Art gilt es  $m \geq n$ . □

Nach Corollar 1.4.7 ist der folgende Begriff wohl-definiert.

DEFINITION 1.4.8. Wenn  $n \geq 1$  und  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ist, dann nennt man  $\mathcal{V}$  einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum. In diesem Fall schreiben wir  $\dim(X) = n$ . Ein trivialer Vektorraum hat Dimension 0.

Offensichtlich gilt  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ .

COROLLAR 1.4.9. Sei  $n \geq 1$ , und seien  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängige Vektoren von  $X$ .

(i) Angenommen für alle  $x \in X$  die Vektoren

$$x, v_1, \dots, v_n$$

sind linear abhängig. Dann ist  $M := \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $X$ .

(ii) Wenn  $\dim(X) = n$  und wenn  $w_1, \dots, w_n$  linear unabhängige Vektoren von  $X$  sind, dann ist  $B := \{w_1, \dots, w_n\}$  eine Basis von  $X$ .

(iii) Sei  $Y$  ein Unterraum von  $X$  mit  $\dim(Y) = \dim(X) = n$ . Dann gilt  $Y = X$ .

(iv) Seien  $\dim(X) = n$ ,  $1 \leq r < n$ , und  $w_1, \dots, w_r$  linear unabhängige Vektoren von  $X$ . Dann gibt es Vektoren  $v_{r+1}, \dots, v_n$  von  $X$ , sodass die Menge

$$\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

eine Basis von  $X$  ist.

BEWEIS. Aufgabe. □

COROLLAR 1.4.10. Sei  $\mathcal{V} := (X; +, \mathbf{0}, \cdot)$  ein Vektorraum mit  $\dim(X) = n$ . Wenn  $Y \preceq X$ , dann hat  $Y$  eine Basis und  $\dim(Y) \leq \dim(X)$ .

BEWEIS. Wenn  $Y = \{\mathbf{0}\}$ , dann ist  $\emptyset$  eine Basis von  $Y$  und  $\dim(Y) = 0 \leq \dim(X)$ . Wenn  $Y$  ein nicht trivialer Vektorraum ist, dann gilt  $Y = X$  oder  $Y$  ist ein echter Unterraum von  $X$ . In dem ersten Fall ist der Beweis trivial. Sei  $Y$  ein echter, nicht trivialer Unterraum von  $X$ . Dann gibt es  $y_1 \in Y$  mit  $y_1 \neq \mathbf{0}$ . Nach Bemerkung 1.1.4(vi) ist die Menge  $M_1 := \{y_1\}$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $Y$ . Angenommen  $M_1$  erfüllt die Annahme des Corollars 1.4.9(i). Dann ist  $M_1$  eine Basis von  $Y$  und  $\dim(Y) = 1$ . Wenn  $M_1$  die Annahme des Corollars nicht erfüllt, dann gibt es  $y_2 \in Y$ , sodass  $M_2 := \{y_1, y_2\}$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $Y$  ist. Auf die gleiche Art können wir dasselbe Argument höchstens  $(n - 1)$  mal wiederholen, um zur erforderlichen Schlussfolgerung zu gelangen. □

### 1.5. Lineare Abbildungen

DEFINITION 1.5.1. Seien  $X$  und  $Y$  Vektorräume. Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt *linear*, oder *lineare Abbildung*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(LA_1) \quad \forall x, x' \in X (f(x + x') = f(x) + f(x')).$$

$$(LA_2) \quad \forall x \in X \forall a \in \mathbb{R} (f(a \cdot x) = a \cdot f(x)).$$

Darüber hinaus, definieren wir folgende Mengen:

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ ist eine lineare Abbildung}\},$$

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist eine lineare Abbildung}\},$$

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine lineare Abbildung}\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{L}(X)$  heißen *Operatoren* auf  $X$ , oder *lineare Transformationen* auf  $X$ , während  $X^*$  der *Dualraum* von  $X$  heißt.

BEISPIEL 1.5.2. Sei  $X$  ein Vektorraum mit  $\dim(X) = n$ , wobei  $n \geq 1$ , und  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $X$ . Dann ist die Funktion  $f_B : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$f_B(x) = (a_1, \dots, a_n),$$

wobei

$$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i,$$

eine lineare Abbildung. Des Weiteren gilt: Wenn  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann ist die Funktion  $\text{pr}_i^B : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\text{pr}_i^B(x) = a_i,$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_B} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow \text{pr}_i^B & \downarrow \text{pr}_i \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

wobei

$$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i,$$

eine lineare Abbildung. Das obige Diagramm ist *kommutativ*, d.h.

$$\text{pr}_i \circ f_B = \text{pr}_i^B,$$

weil

$$(\text{pr}_i \circ f_B)(x) = \text{pr}_i(f_B(x)) = \text{pr}_i(a_1, \dots, a_n) = a_i = \text{pr}_i^B(x); \quad x \in X,$$

wobei die *Projektion*  $\text{pr}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\text{pr}_i(a_1, \dots, a_n) = a_i,$$

für alle  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , und  $i \in \{1, \dots, n\}$ , in  $(\mathbb{R}^n)^*$  ist. Wenn  $n > m \geq 1$ , dann ist die Funktion  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear, wobei

$$g(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_m),$$

für alle  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**BEMERKUNG 1.5.3.** Die Menge  $\mathcal{L}(X, Y)$  ist mit der folgenden Struktur eines Vektorraums ausgestattet:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad x \in X,$$

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x); \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in X,$$

$$\mathbf{0}_X^Y(x) = \mathbf{0}, \quad x \in X,$$

wobei  $\mathbf{0}$  das Null-Element von  $Y$  ist.

**BEWEIS.** Aufgabe. □

**DEFINITION 1.5.4.** Wenn  $m, n \geq 1$ , dann heißt eine Anordnung reeller Zahlen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

eine *Matrix* von  $m$ -Reihen und  $n$ -Spalten. Wenn  $1 \leq i \leq m$ , dann ist die  $i$ -te Reihe von  $A$  die Anordnung

$$A_i = [a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}] = [a_{ij}]_i,$$

und wenn  $1 \leq j \leq n$ , ist die  $j$ -te Spalte von  $A$  die Anordnung

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [a_{ij}]^j.$$



Die Menge der  $m \times n$ -Matrizen wird durch  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  bezeichnet, während die Menge der *quadratischen* Matrizen  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  durch  $M_n(\mathbb{R})$  bezeichnet wird. Seien  $[a_{ij}], [b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} [a_{ij}] = [b_{ij}] &\Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, m\}} \forall_{j \in \{1, \dots, n\}} (a_{ij} = b_{ij}), \\ [a_{ij}] + [b_{ij}] &= [a_{ij} + b_{ij}], \\ a \cdot [b_{ij}] &= [ab_{ij}], \\ \mathbf{0}_{mn} &= [0], \end{aligned}$$

und wenn  $m = n$ , bezeichnen wir die Matrix  $\mathbf{0}_{nn}$  mit  $\mathbf{0}_n$ , oder, wenn  $n$  aus dem Kontext klar ist, mit  $\mathbf{0}$ .

Wenn  $m = n = 2$ , dann nimmt die obige Definition die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} &\Leftrightarrow a = a' \ \& \ b = b' \ \& \ c = c' \ \& \ d = d', \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix}, \\ \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{0}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Man sieht einfach, dass  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ , und als Spezialfall  $M_2(\mathbb{R})$ , mit der oben erwähnten Operationen ausgestattet ein Vektorraum ist.

BEISPIEL 1.5.5. Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

und sei  $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f_A(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Weil

$$\begin{aligned} f_A((x, y) + (x', y')) &= f_A(x + x', y + y') \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(x + x') + b(y + y') \\ c(x + x') + d(y + y') \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax' + by' \\ cx' + dy' \end{bmatrix} \\
&= A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\
&= f_A((x, y)) + f_A((x', y')),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_A(\lambda(x, y)) &= f_A(\lambda x, \lambda y) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(\lambda x) + b(\lambda y) \\ c(\lambda x) + d(\lambda y) \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \\
&= \lambda f_A(x, y),
\end{aligned}$$

ist die Funktion  $f_A$  eine lineare Abbildung.

**BEMERKUNG 1.5.6.** Seien  $X, Y, Z$  Vektorräume,  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$ .

(i) Die Komposition  $g \circ f$  ist in  $\mathcal{L}(X, Z)$ , wobei  $g \circ f : X \rightarrow Z$  durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X,$$

definiert ist.

(ii)  $\text{id}_X \in \mathcal{L}(X)$ .

(iii)  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

(iv) Wenn  $x \in X$ , dann  $f(-x) = -f(x)$ .

(v) Wenn  $n \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , und  $x_1, \dots, x_n \in X$ , dann

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

**BEWEIS.** Aufgabe. Für den induktiven Beweis im Fall (v) verwenden wir die folgende rekursive Definition von  $\sum_{i=1}^n x_i$ , wobei  $x_1, \dots, x_n \in X$  und  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n x_i = \begin{cases} x_1 & , n = 1 \\ \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_n & , n > 1. \end{cases} \quad \square$$

DEFINITION 1.5.7. Seien  $X, Y$  Vektorräume  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Der *Kern* von  $f$  ist die Menge

$$\text{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x) = \mathbf{0}\}.$$

Der Kern von  $f$  ist ein Unterraum von  $X$  und  $f$  ist eine Injektion genau dann, wenn  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$  (Aufgabe).

## 1.6. Lineare Isomorphismen

Eine lineare Abbildung erhält die lineare Abhängigkeit, aber nicht unbedingt die lineare Unabhängigkeit. Letzteres gilt, wenn eine lineare Abbildung injektiv ist. Wenn sie eine Bijektion ist, d.h. eine Injektion und eine Surjektion, dann sendet sie eine Basis aus ihrer Definitionsmenge auf eine Basis aus ihrer Zielmenge.

SATZ 1.6.1. Seien  $X, Z$  Vektorräume,  $Y \subseteq X$ ,  $f \in \mathcal{L}(X, Z)$ , und seien  $x_1, \dots, x_n \in X$ .

(i) Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear abhängig in  $X$ . Dann sind  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  linear abhängig in  $Z$ .

(ii) Sei  $Y$  eine linear abhängige Teilmenge von  $X$ . Dann ist

$$f(Y) = \{f(y) \mid y \in Y\}$$

eine linear abhängige Teilmenge von  $Z$ .

(iii) Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig in  $X$ . Dann gibt es eine lineare Abbildung  $g : X \rightarrow Z$ , sodass  $g(x_1), \dots, g(x_n)$  linear abhängig in  $Z$  sind.

(iv) Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig in  $X$  und sei  $f$  eine Injektion. Dann sind  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  linear unabhängig in  $Z$ .

(v) Sei  $Y$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $X$ , und sei  $f$  eine Injektion. Dann gilt:  $f(Y)$  ist eine linear unabhängige Teilmenge von  $Z$ .

(vi) Sei  $X = \langle Y \rangle$  und sei  $f$  eine Surjektion. Dann gilt:  $Z = \langle f(Y) \rangle$ .

(vii) Sei  $Y$  eine Basis von  $X$  und sei  $f$  eine Bijektion. Dann gilt:  $f(Y)$  ist eine Basis von  $Z$ .

BEWEIS 1.6.2. (i) Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und sei  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $a_i \neq 0$ , sodass gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = \mathbf{0}.$$

Dann folgt der Schluss aus den Gleichheiten

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

(ii) Es folgt unmittelbar aus Fall (i).

(iii) Zum Beispiel, können wir die konstante Funktion  $\mathbf{0}_X^Z$  mit dem Wert  $\mathbf{0} \in Z$  nehmen.

(iv) Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Aus der Injektivität von  $f$  folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = f(\mathbf{0}) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0. \end{aligned}$$

(v) Es folgt unmittelbar aus Fall (iv).

(vi) Wenn  $X$  ein trivialer Vektorraum ist, dann  $Y = \emptyset$  oder  $Y = X$ . In beiden Fällen, folgt der Schluss unmittelbar. Sei  $X$  ein nicht trivialer Vektorraum und sei  $z \in Z$ . Dann gibt es ein  $x \in X$ , sodass gilt  $f(x) = z$ . Wenn  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und  $y_1, \dots, y_n \in Y$ , sodass

$$x = \sum_{i=1}^n a_i y_i,$$

dann

$$z = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(y_i) \in \langle f(Y) \rangle.$$

(vii) Aus Fall (v) folgt, dass  $f(Y)$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $Z$  ist und aus Fall (vi) folgt, dass  $Z = \langle f(Y) \rangle$ .

DEFINITION 1.6.3. Seien  $X, Y$  Vektorräume. Eine  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$  ist ein *linearer Isomorphismus* zwischen  $X, Y$ , wenn es eine  $g : Y \rightarrow X$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_Y & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & Y. \\ & & \text{id}_X & & & & \end{array}$$

In diesem Fall schreiben wir  $f : X \simeq Y$ , und wir sagen, dass die Vektorräume  $X$  und  $Y$  (linear) *isomorphisch* sind.

Eine lineare Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , die auch ein linearer Isomorphismus ist, garantiert, dass die zwei Vektorräume  $X$  und  $Y$  aus Sicht der linearen Struktur *gleich* sind. Mit *gleich* wird hier gemeint, dass die beiden Vektorräume  $X$  und  $Y$  die gleichen linearen Eigenschaften haben. Als Nächstes werden wir zeigen, dass zwei isomorphischen endlichdimensionalen Vektorräume die gleiche Dimension haben.

**SATZ 1.6.4.** *Seien  $X, Y$  Vektorräume und sei  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein linearer Isomorphismus.*

- (i)  *$f$  ist eine Bijektion, d.h. eine Injektion und eine Surjektion.*
- (ii) *Sei  $g : Y \rightarrow X$ , sodass  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ . Dann gilt  $g \in \mathcal{L}(Y, X)$ .*
- (iii) *Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\dim(X) = n$ . Dann gilt  $\dim(Y) = n$ .*
- (iv) *Sei  $h : X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung, die eine Bijektion ist. Dann ist  $h$  ein linearer Isomorphismus.*

BEWEIS. Aufgabe. □

Die Eigenschaft (iv) kann als Definition des linearen Isomorphismus dienen. Wenn  $n \geq 1$ , dann ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum isomorphisch zu  $\mathbb{R}^n$ .

**COROLLAR 1.6.5.** *Seien  $X$  ein Vektorraum und  $n \geq 1$ . Dann gilt:  $\dim(X) = n$  genau dann, wenn  $X$  isomorphisch zu  $\mathbb{R}^n$  ist.*

BEWEIS. Aufgabe. □

**SATZ 1.6.6.** *Seien  $n \geq 1$ ,  $X, Z$  Vektorräume und  $Y \subseteq X$ .*

- (i) *Wenn  $X = \langle Y \rangle$  und  $f, g \in \mathcal{L}(X, Z)$  mit*

$$\forall_{y \in Y} (f(y) = g(y)),$$

*dann gilt  $f = g$ .*

- (ii) *Wenn  $Y = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $X$  ist und  $f_0 : Y \rightarrow Z$ , dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $f : X \rightarrow Z$ , sodass gilt*

$$f(v_1) = f_0(v_1) \ \& \ \dots \ \& \ f(v_n) = f_0(v_n).$$

BEWEIS. Aufgabe. □

### 1.7. Der Matrizenraum

Die Definitionen der Menge der  $m \times n$ -Matrizen  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  und der Menge der quadratischen Matrizen  $M_n(\mathbb{R})$  sind in Definition 1.5.4 gegeben.

BEMERKUNG 1.7.1.  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  ist ein Vektorraum mit Dimension  $mn$ .

BEWEIS. Aus Definition 1.5.4 folgt unmittelbar, dass  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  ein Vektorraum ist. Um die Dimension von  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  zu bestimmen, ordnen wir der  $m \times n$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

folgendes Element von  $\mathbb{R}^{mn}$  zu

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{i1}, \dots, a_{in}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}).$$

Z.B. der  $2 \times 2$ -Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

wird das 4-Tupel

$$(a, b, c, d)$$

zugeordnet. Man sieht einfach, dass die Funktion  $e : M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$  ein linearer Isomorphismus ist. Daher folgt aus Satz 1.6.4(iii), dass

$$\dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}^{mn}) = mn. \quad \square$$

DEFINITION 1.7.2. Sei die Funktion  ${}^t : M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R})$ , definiert durch

$$[a_{ij}] \mapsto [a_{ij}]^t,$$

wobei

$$[a_{ij}]^t = [b_{ji}], \quad b_{ji} = a_{ij}.$$

Die *transponierte* Matrix  $[a_{ij}]^t$  hat als Spalten die Reihen von  $[a_{ij}]$  und als Reihen die Spalten von  $[a_{ij}]$ . Wenn  $A \in M_n(\mathbb{R})$  mit

$$A^t = A,$$

sagen wir, dass  $A$  eine *symmetrische* Matrix ist. Wir bezeichnen die Menge der symmetrischen Matrizen mit  $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ . Eine *Diagonalmatrix* in  $M_n(\mathbb{R})$  hat die Form

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Mit  $I_n$  wird die *Einheitsmatrix* in  $M_n(\mathbb{R})$  bezeichnet, definiert durch

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}],$$

wobei<sup>2</sup>

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ if } i = j \\ 0 & , \text{ if } i \neq j. \end{cases}$$

Z.B. wenn wir die  $2 \times 3$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

betrachten, dann ist ihre transponierte Matrix  $A^t$  die folgende  $3 \times 2$ -Matrix

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ein Beispiel einer symmetrischen Matrix ist

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} = A^t.$$

**BEMERKUNG 1.7.3.** Seien  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_n(\mathbb{R})$ , und  $a \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .
- (ii)  $(a \cdot B)^t = a \cdot B^t$ .
- (iii)  $(A^t)^t = A$ .
- (iv)  $C + C^t$  ist symmetrisch.

**BEWEIS.** Aufgabe. □

<sup>2</sup>Das symbol  $\delta_{ij}$  ist als Kronecker's delta bekannt.

Als Nächstes definieren wir die Multiplikation zwischen Matrizen, eine Operation, die, wie wir später noch sehen werden, mit der Komposition von linearen Abbildungen verknüpft ist. Um die Multiplikation  $AB$  zu definieren müssen die Anzahl der Spalten von  $A$  und die Anzahl der Reihen von  $B$  gleich sein!

DEFINITION 1.7.4. Sei  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  und  $B = [b_{jk}] \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ . Das Produkt  $AB \in M_{m,l}(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$AB = [a_{ij}][b_{jk}] = [c_{ik}],$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk},$$

für jedes  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq k \leq l$ . Wenn  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , dann definieren wir

$$A^n = \begin{cases} I_n & , n = 0 \\ AA^{n-1} & , n > 0 \end{cases}$$

Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ist *invertierbar*, wenn es ein  $B \in M_n(\mathbb{R})$  gibt, sodass  $AB = BA = I_n$ . Wir bezeichnen die Menge der invertierbaren Matrizen in  $M_n(\mathbb{R})$  mit  $\text{Inv}_n(\mathbb{R})$ .

Z.B. wenn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

dann

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Es stimmt nicht immer, dass  $AB = BA$ . Z.B.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

während

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wenn  $a, b \in \mathbb{R}$  und

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



dann

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Also

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Merken Sie, dass im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$ , gibt es quadratische Matrizen, die ungleich Null sind, die nicht invertierbar sind, wie z.B. die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

SATZ 1.7.5. Seien  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B, C \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ , und  $D \in M_{l,s}(\mathbb{R})$ .

- (i)  $AI_n = A$  und  $I_m A = A$ .
- (ii)  $A(B + C) = AB + AC$ .
- (iii) Wenn  $a \in \mathbb{R}$ , dann  $A(a \cdot B) = a \cdot (AB)$ .
- (iv)  $A(BD) = (AB)D$ .
- (v) Die Multiplikation  $B^t A^t$  ist wohldefiniert und  $(AB)^t = B^t A^t$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

COROLLAR 1.7.6. Seien  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ .

- (i) Wenn  $AB = BA = I_n = AC = CA$ , dann  $B = C$ . Wir bezeichnen die eindeutig bestimmte Matrix  $B$ , sodass gilt  $AB = BA = I_n$  mit  $A^{-1}$ , und wir nennen Sie die inverse Matrix von  $A$ .
- (ii)  $I_n^t = I_n$ .
- (iii) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ .

BEWEIS. (i)  $C = I_n C = (AB)C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B$ .  
(ii)  $[\delta_{ij}]^t = [d_{ji}]$ , wobei  $d_{ji} = \delta_{ij}$ . Der Schluss folgt aus der offensichtlichen Gleichheit  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .  
(iii) Aus Satz 1.7.5(v) und Fall (ii) folgt  $I_n = I_n^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$ , und  $I_n = I_n^t = (A^{-1}A)^t = A^t (A^{-1})^t$ . Weil  $I_n = (A^t)^{-1} A^t = A^t (A^t)^{-1}$ , folgt aus Fall (i)  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ . □

Man kann zeigen, dass wenn  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , dann

$$AB = I_n \Rightarrow BA = I_n.$$

Daher müssen wir nicht prüfen, dass beide obigen Gleichungen stimmen, um zu zeigen, dass eine Matrix invertierbar ist. Merken Sie, dass dies der Fall ist,

nur wenn das Produkt  $AB$  gleich  $I_n$  ist. Wenn  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  invertierbar sind, dann ist  $AB$  auch invertierbar und  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , weil

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A[B(B^{-1}A^{-1})] = A[(BB^{-1})A^{-1}] = A[I_n A^{-1}] = I_n.$$

### 1.8. Matrizen und lineare Abbildungen

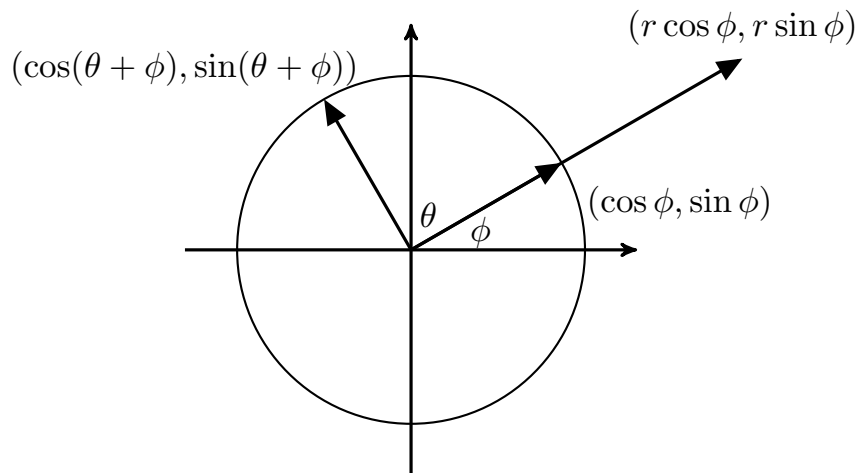
Wir können lineare Abbildungen mithilfe von Matrizen darstellen. Als Nächstes beschreiben wir ein wichtiges Beispiel.

BEISPIEL 1.8.1. Sei  $\theta \in \mathbb{R}$  und sei die Matrix  $R(\theta)$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Sei die Funktion  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$\begin{aligned} R_\theta(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Funktion  $R_\theta$  ist eine lineare Abbildung, die die Rotation im Gegenuhrzeigersinn eines Vektors  $(x, y)$  um den Winkel  $\theta$  representiert. Wenn  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2).$$

Daraus folgt, dass die Matrix  $R(\theta)$  invertierbar ist.

DEFINITION 1.8.2. Sei die Matrix  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Die *lineare Abbildung von A* ist die Funktion

$$T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definiert durch

$$T_A(x) = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

Wenn ein beliebiges Element  $x = (x_1, \dots, x_n)$  von  $\mathbb{R}^n$  als eine  $n \times 1$ -Matrix  $X$  betrachtet wird und wenn die  $m \times 1$ -Matrix  $AX$  als ein Vektor in  $\mathbb{R}^m$  betrachtet wird, dann schreiben wir

$$T_A(X) = AX,$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} T_A(X)_1 \\ \vdots \\ T_A(X)_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

BEISPIEL 1.8.3. Sei  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$ , und  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Es gilt

$$T_A(e_l) = (a_{1l}, \dots, a_{ml}) = A^l,$$

wobei  $A^l$  die  $l$ -te Spalte von  $A$  ist. Also gilt

$$T_A(e_l)_i = a_{il},$$

für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Aus Satz 1.7.5 folgt das folgende.

SATZ 1.8.4. Seien  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , und  $a \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .
- (ii) Wenn  $T_A = \mathbf{0}$ , dann  $A = \mathbf{0}_{mn}$ , und wenn  $T_A = T_B$ , dann  $A = B$ .
- (iii)  $T_{A+B} = T_A + T_B$ .
- (iv)  $T_{a \cdot A} = aT_A$ .
- (v)  $T_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  and  $T_{\mathbf{0}_{mn}} = \mathbf{0}$ .
- (vi) Wenn  $C \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ , dann  $T_{AC} = T_A \circ T_C$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^l & \xrightarrow{T_C} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_A} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & T_{AC} & & \end{array}$$

- (vii) Wenn  $A$  invertierbar ist, dann ist  $T_A$  invertierbar und  $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$ .
- (viii) Die Funktion  $\mathcal{T} : M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , definiert durch  $A \mapsto T_A$ , ist eine lineare Abbildung.

BEWEIS. Aufgabe. □

Im nächsten Theorem werden wir eine Matrix  $A_T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , wobei

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung ist, definieren.

THEOREM 1.8.5. Seien  $n, m \geq 1$ . Wenn  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung ist, dann gibt es eine Matrix  $A_T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , sodass gilt

$$T = T_{A_T},$$

d.h. für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  es gilt

$$T(x) = T_{A_T}(x) = A_T x.$$

Die Matrix  $A_T$  ist die Matrix der linearen Abbildung  $T$ .

BEWEIS. Sei  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es gibt  $T(e_i)_1, \dots, T(e_i)_m \in \mathbb{R}$ , die Koeffizienten bezüglich der kanonischen Basis  $E_m$  von  $\mathbb{R}^m$ , sodass gilt

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^m T(e_i)_j e_j = (T(e_i)_1, \dots, T(e_i)_m).$$

Diese Vektoren in  $\mathbb{R}^m$  sind die Spalten von  $A_T$ , d.h.

$$A_T = \begin{bmatrix} T(e_1)_1 & \dots & T(e_n)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(e_1)_j & \dots & T(e_n)_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(e_1)_m & \dots & T(e_n)_m \end{bmatrix} = [a_{ji}] = [T(e_i)_j].$$

Um zu zeigen, dass die lineare Abbildungen  $T$  und  $T_{A_T}$  gleich sind, genügt es nach Satz 1.6.6 zu zeigen, dass  $T$  und  $T_{A_T}$  gleich auf den Elemente von  $E_n$  sind. Sei  $e_i \in E_n$ . Nach Beispiel 1.8.3 ist  $T_A(e_i)$  die  $i$ -te Spalte von  $A$ . Also ist  $T_{A_T}(e_i)$  die  $i$ -te Spalte von  $A_T$ , also gilt

$$T_{A_T}(e_i) = T(e_i),$$

nach der obigen Definition von  $A_T$ . □

BEISPIEL 1.8.6. Sei  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Abbildung mit  $T(0, 1) = (a, c)$  und  $T(1, 0) = (b, d)$ . Es gilt

$$A_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

SATZ 1.8.7. Sei die Funktion  $\mathcal{A} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ , definiert durch

$$T \mapsto A_T := \mathcal{A}(T),$$

für jedes  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Es gelten:

(i)  $\mathcal{A} \circ \mathcal{T} = \text{id}_{M_n(\mathbb{R})}$  und  $\mathcal{T} \circ \mathcal{A} = \text{id}_{L(\mathbb{R}^n)}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_{L(\mathbb{R}^n)} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ M_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & L(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & M_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & L(\mathbb{R}^n) \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & \text{id}_{M_n(\mathbb{R})} & & \end{array}$$

(ii)  $A_{S \circ T} = A_S A_T$ .

(iii)  $A_{I_n} = I_n$  und  $A_{O_n} = O_n$ .

(ix)  $A_{S+T} = A_S + A_T$ .

(x)  $A_{\lambda T} = \lambda A_T$ .

(xi) Wenn  $T$  invertierbar ist, dann ist  $A_T$  invertierbar und  $A_T^{-1} = A_{T^{-1}}$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

### 1.9. Determinante einer Matrix

DEFINITION 1.9.1. Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine  $2 \times 2$ -Matrix. Die *Determinante*  $\text{Det}(A)$  von  $A$  ist definiert durch

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Wenn

$$A^1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \quad \& \quad A^2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

die Spalten von  $A$  sind, dann schreiben wir

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(A^1, A^2).$$

Es gelten

$$\text{Det}(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

und

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \text{Det}(A^t).$$

BEMERKUNG 1.9.2. Seien die folgenden  $2 \times 1$  Matrizen:

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad C^1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad D^2 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.$$

Es gelten:

- (i)  $\text{Det}(A^1 + C^1, B^2) = \text{Det}(A^1, B^2) + \text{Det}(C^1, B^2)$ .
- (ii)  $\text{Det}(A^1, B^2 + D^2) = \text{Det}(A^1, B^2) + \text{Det}(A^1, D^2)$ .
- (iii) Wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann  $\text{Det}(\lambda A^1, B^2) = \lambda \text{Det}(A^1, B^2) = \text{Det}(A^1, \lambda B^2)$ .
- (iv) Wenn  $A^1 = B^2$ , dann  $\text{Det}(A^1, B^2) = 0$ .

BEWEIS. Wir zeigen nur (i) und der Rest ist Aufgabe.

$$\begin{aligned} \text{Det}(A^1 + C^1, B^2) &= \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 + c_1)b_2 - b_1(a_2 + c_2) \\ &= (a_1b_2 - b_1a_2) + (c_1b_2 - b_1c_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \text{Det}(A^1, B^2) + \text{Det}(C^1, B^2). \quad \square$$

COROLLAR 1.9.3. Seien die folgenden  $2 \times 1$ -Matrizen:

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Es gelten:

- (i) Wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann  $\text{Det}(A^1 + \lambda B^2, B^2) = \text{Det}(A^1, B^2)$ .
- (ii) Wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann  $\text{Det}(A^1, B^2 + \lambda A^1) = \text{Det}(A^1, B^2)$ .
- (iii)  $\text{Det}(A^1, B^2) = -\text{Det}(B^2, A^1)$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

Die Determinante einer Matrix liefert nicht-triviale Informationen über Vektoren, die mit  $A$  im Zusammenhang stehen. Wir haben gesehen, dass  $\text{Det}(I_2) = 1 \neq 0$ , und wir wissen, dass die Spalten der Matrix  $I_2$   $e_1 = (1, 0)$  und  $e_2 = (0, 1)$  linear unabhängige Elemente sind. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

SATZ 1.9.4. Seien die folgenden  $2 \times 1$ -Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren  $(a_1, a_2)$  und  $(b_1, b_2)$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^2$  genau dann, wenn

$$\text{Det}(A, B) \neq 0.$$

BEWEIS. ( $\Rightarrow$ ) Seien  $x = (a_1, a_2)$  und  $y = (b_1, b_2)$  linear unabhängige Vektoren von  $\mathbb{R}^2$  mit

$$\text{Det}(A, B) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0.$$

Also gilt

$$b_2(a_1, a_2) + (-a_2)(b_1, b_2) = (b_2 a_1 - a_2 b_1, b_2 a_2 - a_2 b_2) = (0, 0).$$

Weil die Vektoren  $x = (a_1, a_2)$  und  $y = (b_1, b_2)$  linear unabhängig sind, gilt

$$b_2 = 0 = -a_2 = a_2,$$

also gilt  $x = (a_1, 0), y = (b_1, 0)$  mit  $a_1 \neq 0$  und  $b_1 \neq 0$ . Also gilt

$$(a_1, 0) = \frac{a_1}{b_1}(b_1, 0),$$

d.h. die Vektoren  $x, y$  sind linear abhängig, was ein Widerspruch ist. Also gilt  $\text{Det}(A, B) \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Sei  $\text{Det}(A, B) \neq 0$ , und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda(a_1, a_2) + \mu(b_1, b_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2) = (0, 0).$$

Also gilt

$$\lambda a_1 = -\mu b_1 \quad \& \quad \lambda a_2 = -\mu b_2.$$

Sei  $\lambda \neq 0$  (wenn  $\mu \neq 0$ , arbeiten wir ähnlich). Nach Bemerkung 1.9.2 gilt

$$\begin{aligned} \text{Det}(A, B) &= \begin{vmatrix} \left(\frac{-\mu}{\lambda}\right)b_1 & b_1 \\ \left(\frac{-\mu}{\lambda}\right)b_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{-\mu}{\lambda}\right) \begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{-\mu}{\lambda}\right) 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Also gilt  $\lambda = 0 = \mu$ , und die Vektoren  $(a_1, a_2)$  und  $(b_1, b_2)$  sind linear unabhängig.  $\square$

SATZ 1.9.5. Seien  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ .

(i)  $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$ .

(ii)  $A$  ist invertierbar genau dann, wenn  $\text{Det}(A) \neq 0$ .

BEWEIS. (i) Aufgabe.

(ii) Wenn  $AA^{-1} = I_2$ , dann gilt aus Fall (i)

$$1 = \text{Det}(I_2) = \text{Det}(AA^{-1}) = \text{Det}(A)\text{Det}(A^{-1}).$$

Daraus folgt  $\text{Det}(A) \neq 0$ ,  $\text{Det}(A^{-1}) \neq 0$ , und

$$\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}.$$

Für den Beweis der konversen Implikation sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Wir zeigen, dass das System

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$



$$\begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ ax + bz = 1 \quad \& \quad cx + dz = 0,$$

und

$$ay + bw = 0 \quad \& \quad cy + dw = 1,$$

eine Lösung hat. Wenn wir die die Gleichung  $ax+bz = 1$  mit  $d$  multiplizieren, und die Gleichung  $cx + dz = 0$  mit  $b$  multiplizieren, und wenn wir die neuen Gleichungen subtrahieren, dann gilt

$$dax + dbz - bcx - bdz = d \Leftrightarrow x = \frac{d}{ad - bc}.$$

Auf ähnliche Art erhalten wir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

DEFINITION 1.9.6. Wenn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

eine  $3 \times 3$ -Matrix ist, ist die *Determinante*  $\text{Det}(A)$  von  $A$  definiert durch

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Es gelten

$$\text{Det}(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} := 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

und

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Alle Eigenschaften bezüglich der Determinante einer Matrix in  $M_2(\mathbb{R})$  gelten auch für die Determinante einer Matrix in  $M_3(\mathbb{R})$ .

### 1.10. Euklidische Vektorräume

DEFINITION 1.10.1. Sei  $X$  ein Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf  $X$  ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

sodass für alle  $x, y, z \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(SP_1) \quad \langle x, x \rangle \geq 0.$$

$$(SP_2) \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}.$$

$$(SP_3) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$(SP_4) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

$$(SP_5) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

Wenn  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $X$  ist, dann heißt das Paar  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein *euklidischer Vektorraum*.

Eine *Norm* auf  $X$  ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

sodass für alle  $x, y \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(Nrm_1) \quad \|x\| \geq 0.$$

$$(Nrm_2) \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}.$$

$$(Nrm_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Dreiecks-Ungleichung).}$$

$$(Nrm_4) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Wenn  $\|\cdot\|$  ein Norm auf  $X$  ist, dann heißt das Paar  $(X, \|\cdot\|)$  ein *normierter Vektorraum*.

Aus  $(SP_3)$  folgt:

$$(SP_6) \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \text{ und}$$

$$(SP_7) \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

Aus  $(Nrm_4)$  folgt

$$\| -x \| = \| (-1)x \| = | -1 | \|x\| = 1 \|x\| = \|x\|.$$

DEFINITION 1.10.2. Wenn  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  Vektoren von  $\mathbb{R}^n$  sind, dann wird das *übliche Skalarprodukt*  $\langle x, y \rangle$  von  $x, y$  definiert

durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Wenn  $n = 1$ , dann ist das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}$  das Produkt auf  $\mathbb{R}$ . Nach Definition 1.10.2 gilt

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0.$$

**BEMERKUNG 1.10.3.** Das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ .

**BEWEIS.** Aufgabe. □

**SATZ 1.10.4.** Seien  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $x, y \in X$ .

(i)  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle).$

(ii)  $x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall z \in X (\langle x, z \rangle = 0).$

(iii)  $\forall z \in X (\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle) \Rightarrow x = y.$

**BEWEIS.** Aufgabe. □

Wenn  $x = \mathbf{0}$ , dann gilt  $\|x\| = 0$ , weil

$$\|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{0} \cdot \mathbf{0}\| = |0| \|\mathbf{0}\| = 0 \|\mathbf{0}\| = 0.$$

Darüber hinaus, wenn  $x = \mathbf{0}$ , oder  $y = \mathbf{0}$ , oder  $y = \lambda x$  mit  $\lambda > 0$ , dann gilt

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

**DEFINITION 1.10.5.** Wenn  $x \in \mathbb{R}^n$ , dann ist die übliche Norm  $|x|$  von  $x$  definiert durch

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Wenn  $x \in \mathbb{R}^n$ , dann ist die Norm  $|x|$  von  $x$  die *Länge* des Vektors  $x$ . Um zu zeigen, dass die übliche Norm auf  $\mathbb{R}^n$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist, brauchen wir folgende Ungleichung.

**SATZ 1.10.6 (Cauchysche Ungleichung).** Wenn  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|.$$

BEWEIS. Nach Definitionen 1.10.2 und 1.10.5 müssen wir die Ungleichung beweisen

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

die äquivalent zur folgenden Ungleichung ist

$$A = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = B.$$

Die letzte Ungleichung beweisen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} B - A &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 1.10.7. Eine Norm auf einen Vektorraum  $X$  ist definiert mithilfe eines Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $X$  durch

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}},$$

für alle  $x \in X$ .

BEWEIS. Um zu zeigen, dass  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $X$  ist, verwenden wir die *Cauchy-Schwartz Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Der Rest ist Aufgabe. □

DEFINITION 1.10.8. Eine *Metrik*, oder eine *Abstandsfunktion*,  $d$  auf eine Menge  $X$  ist eine Funktion

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y),$$

sodass für alle  $x, y, z \in X$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(Mtr_1) \quad d(x, y) \geq 0.$$

$$(Mtr_2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(Mtr_3) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(Mtr_4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Wenn  $d$  eine Metrik auf  $X$  ist, dann heißt das Paar  $(X, d)$  ein *metrischer Raum*.

BEMERKUNG 1.10.9. Eine Metrik auf einen Vektorraum  $X$  ist definiert mithilfe einer Norm  $\|\cdot\|$  auf  $X$  durch

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

für alle  $x, y \in X$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

DEFINITION 1.10.10. Die *übliche Metrik*  $d$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist durch die übliche Norm auf  $\mathbb{R}^n$  definiert wie folgt:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle},$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

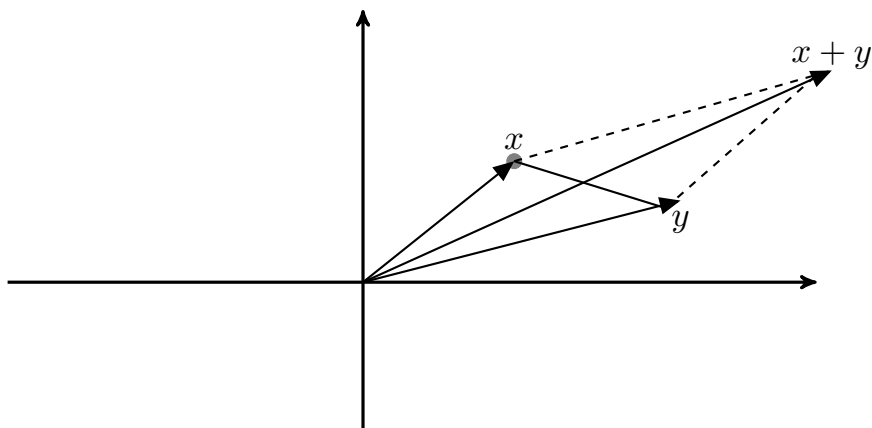
Um die geometrische Bedeutung des Euklidischen Skalarprodukts zu verstehen, werden wir zuerst sehen, dass ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  *orthogonal* zu einem Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$  ist (bezeichnet durch  $x \perp y$ ), genau dann, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ . Um das zu erklären, arbeiten wir wie folgt: Es ist einfach geometrisch zu sehen<sup>3</sup>, dass

$$x \perp y \Leftrightarrow |x - y| = |x + y|,$$

weil die Diagonalen eines Parallelogramms genau dann gleich lang sind, wenn  $x$  und  $y$  zueinander orthogonal sind.

---

<sup>3</sup>Die folgende Figur erklärt auch warum  $|x + y| \leq |x| + |y|$  gilt.



Wir zeigen, dass

$$|x - y| = |x + y| \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

Weil  $|x| \geq 0$ , gilt

$$\begin{aligned} |x - y| = |x + y| &\Leftrightarrow |x - y|^2 = |x + y|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x - y, x - y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\Leftrightarrow 4\langle x, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei letzten Äquivalenzen folgt die Äquivalenz

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

COROLLAR 1.10.11 (Satz von Pythagoras). Wenn  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \perp y$ , dann gilt

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

BEWEIS. Aufgabe. □

Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt

$$\left| \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} \right| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{|x||y|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} \leq 1.$$

Also gibt es einen eindeutig bestimmten Winkel  $\theta \in [0, \pi]$ , sodass gilt

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}.$$

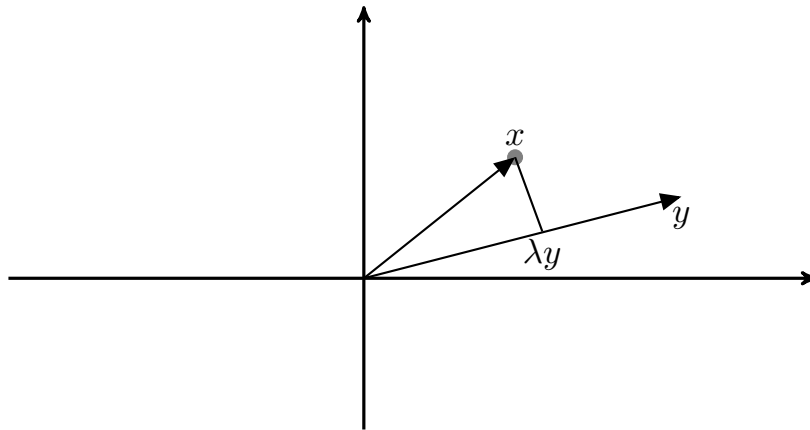
Wir nennen  $\theta$  den Winkel *zwischen*  $x$  und  $y$ . Offensichtlich, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ , dann  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

SATZ 1.10.12. Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $y \neq \mathbf{0}$ . Die Projektion  $\text{pr}_y(x)$  von  $x$  auf  $y$  ist definiert durch

$$\text{pr}_y(x) = \lambda y,$$

wobei

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}.$$



BEWEIS. Weil  $(x - \lambda y) \perp y$  und  $y \neq \mathbf{0}$ , gilt

$$\begin{aligned} \langle (x - \lambda y), y \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - \langle \lambda y, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

□

### 1.11. Der Minkowski-Raum

DEFINITION 1.11.1. Sei  $n \geq 2$  und seien Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, s)$  und  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, t)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Das *Minkowski Produkt* ist die Funktion

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_M: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_M,$$

definiert durch

$$\langle x, y \rangle_M := \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \right) - st = x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - st.$$

Das Paar  $\mathcal{M}_4 := (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ , wobei

$$\langle x, y \rangle_M = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - st,$$

für alle  $x = (x_1, x_2, x_3, s)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3, t) \in \mathbb{R}^4$  das Minkowski Produkt auf  $\mathbb{R}^4$  ist, ist die *Minkowski Raumzeit*. Wir nennen das Paar  $\mathcal{M}_3 := (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ , wobei

$$\langle x, y \rangle_M = x_1 y_1 + x_2 y_2 - st,$$

für alle  $x = (x_1, x_2, s)$  und  $y = (y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^3$ , das Minkowski Produkt auf  $\mathbb{R}^3$  ist, die *Minkowski Ebenezeit*. Wir nennen das Paar  $\mathcal{M}_2 := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ , wobei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_M = x_1 y_1 - st,$$

für alle  $x = (x_1, s)$  und  $(y_1, t) \in \mathbb{R}^2$ , das Minkowski Produkt auf  $\mathbb{R}^2$ , die *Minkowski Geradezeit*.

Es gelten

$$\begin{aligned} \langle (x_1, \dots, x_{n-1}, s), (x_1, \dots, x_{n-1}, s) \rangle_M &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right) - s^2 \\ &= x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - s^2, \end{aligned}$$

und für  $n = 4$

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3, s), (x_1, x_2, x_3, s) \rangle_M &= \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) - s^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - s^2. \end{aligned}$$

Die Minkowski Raumzeit ist für die spezielle Relativitätstheorie wichtig.

DEFINITION 1.11.2. Sei  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, s) \in \mathbb{R}^n$  und sei

$$Q_M(x) = \langle x, x \rangle_M = \langle (x_1, \dots, x_{n-1}, s), (x_1, \dots, x_{n-1}, s) \rangle_M.$$

Wenn  $Q_M(x) > 0$ , dann ist  $x$  ein *raumartiger Vektor*.

Wenn  $Q_M(x) = 0$ , dann ist  $x$  ein *lichtartiger Vektor*.

Wenn  $Q_M(x) < 0$ , dann ist  $x$  ein *zeitartiger Vektor*.



BEISPIEL 1.11.3. Der Vektor  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $x \neq 0$ , ist raumartig, weil

$$Q_M((x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - 0 > 0.$$

Der Vektor  $(1, 1, 0, \dots, 0, \sqrt{2}) \neq (0, \dots, 0)$  ist lichtartig, weil

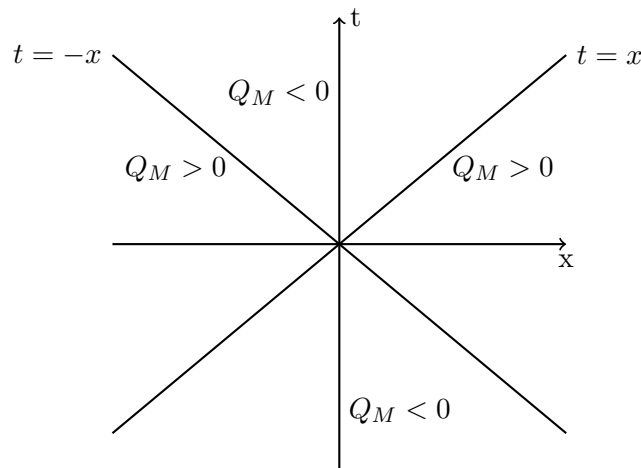
$$Q_M((1, 1, 0, \dots, 0, \sqrt{2})) = 1^2 + 1^2 + 0^2 + \dots + 0^2 - \sqrt{2}^2 = 0.$$

Der Vektor  $y = (0, \dots, 0, s) \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $y \neq 0$ , ist zeitartig, weil

$$Q_M((0, \dots, 0, s)) = 0^2 + \dots + 0^2 - s^2 < 0.$$

In der Minkowski Geradezeit  $\mathcal{M}_2$  gilt:

- (a) Die lichtartigen Vektoren liegen auf den Geraden  $t = x$  und  $t = -x$ .
- (b) Die zeitartigen Vektoren liegen innerhalb des Kegels mit Spitze  $(0, 0)$  und erzeugenden Geraden  $t = x$  und  $t = -x$ .
- (c) Die raumartigen Vektoren liegen außerhalb des oben beschriebenen Kegels.



In der Minkowski Ebenezeit  $\mathcal{M}_3$  bilden die lichtartigen Vektoren  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$  einen Kegel mit Spitze  $(0, 0, 0)$  und mit Gleichung

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

Die zeitartigen Vektoren liegen innerhalb dieses Kegels, und die raumartigen Vektoren liegen außerhalb dieses Kegels.

SATZ 1.11.4. Seien die Vektoren  $x = (x_1, x_2, x_3, s), y = (y_1, y_2, y_3, t), z = (z_1, z_2, z_3, u) \in \mathbb{R}^4$ , und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Es gelten:

$$(i) \langle x, y + z \rangle_M = \langle x, y \rangle_M + \langle x, z \rangle_M.$$

$$(ii) \langle x, y \rangle_M = \langle y, x \rangle_M.$$

$$(iii) \langle \lambda x, y \rangle_M = \lambda \langle x, y \rangle_M.$$

$$(iv) \text{ Wenn } \langle x, w \rangle_M = 0, \text{ f\"ur alle } w \in \mathbb{R}^4, \text{ dann gilt } x = (0, 0, 0, 0).$$

BEWEIS. Aufgabe. □

Die Geometrie in der Minkowski Geradezeit  $\mathcal{M}_2$  ist ganz anders als die Geometrie in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Z.B. die Vektoren  $(1, 1)$  und  $(2, 2)$  sind orthogonal in  $\mathcal{M}_2$ , weil

$$\langle (1, 1), (2, 2) \rangle_M = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0,$$

aber die sind parallel in  $\mathbb{R}^2$ !



## KAPITEL 2

# Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

### 2.1. Offene Mengen

Für unsere Untersuchungen von Funktionen mehrerer Veränderlichen brauchen wir einige fundamentale *topologische* Begriffe im  $\mathbb{R}^n$ . Wenn  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , dann ist  $\langle x, y \rangle$  das übliche Skalarprodukt von  $x, y$ , und  $|x|$  ist die übliche Norm von  $x$ , und  $d(x, y)$  ist der Abstand von  $x, y$  bezüglich der üblichen Metrik  $d$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINITION 2.1.1. Seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$ . Die *offene Kugel*  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  mit Mittelpunkt  $x$  and Radius  $\epsilon$  ist definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x, \epsilon) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \epsilon\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \epsilon\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} < \epsilon\}.\end{aligned}$$

Die *abgeschlossene Kugel*  $\mathcal{B}(x, \epsilon]$  mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $\epsilon$  ist definiert durch

$$\mathcal{B}(x, \epsilon] := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine *Umgebung* von  $x$ , falls ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass

$$\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq U.$$

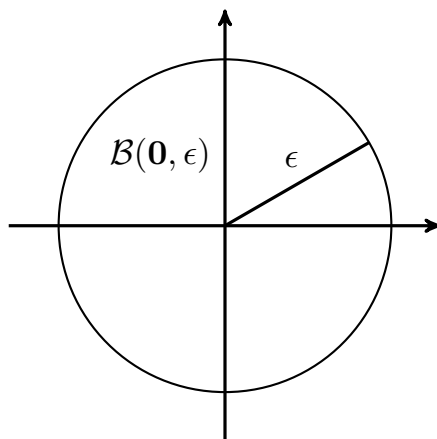
Insbesondere ist  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  eine Umgebung von  $x$ . Mann nennt  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  die  $\epsilon$ -*Umgebung* von  $x$ .

BEISPIEL 2.1.2. Die offene Kugel  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$  mit Mittelpunkt der Nullvektor  $\mathbf{0} = (0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$  und Radius  $\epsilon$  ist die Menge

$$\mathcal{B}(\mathbf{0}, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < \epsilon\},$$

und die abgeschlossene Kugel  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \epsilon]$  mit Mittelpunkt der Nullvektor  $(0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$  und Radius  $\epsilon$  ist die Menge

$$\mathcal{B}(\mathbf{0}, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq \epsilon\}.$$



SATZ 2.1.3. Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq y$ . Dann gibt es Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$ , die punktfremd sind, d.h.  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

BEWEIS. Weil  $x \neq y$ , gilt  $d(x, y) = |x - y| > 0$ . Sei

$$\epsilon = \frac{d(x, y)}{3} > 0,$$

und seien

$$U_x = \mathcal{B}(x, \epsilon), \quad U_y = \mathcal{B}(y, \epsilon).$$

Es gilt  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Angenommen  $z \in U_x \cap U_y$ . Es gelten  $d(z, x) < \epsilon$  und  $d(z, y) < \epsilon$ , also gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\epsilon = \frac{2d(x, y)}{3},$$

was ein Widerspruch ist. □

DEFINITION 2.1.4. Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *offen*, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h.

$$\forall x \in U \exists \epsilon > 0 (\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq U).$$

BEISPIEL 2.1.5. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Das Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

ist offen. Wenn  $x \in (a, b)$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq (a, b)$ , für jedes  $\epsilon > 0$  mit

$$\epsilon \leq \min\{|x - a|, x - b|\}.$$

Das Intervall

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

ist offen. Wenn  $x \in (a, +\infty)$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq (a, +\infty)$ , für jedes  $\epsilon > 0$  mit  $\epsilon \leq x - a$ . Das Intervall

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

ist offen. Wenn  $x \in (-\infty, b)$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq (-\infty, b)$ , für jedes  $\epsilon > 0$  mit  $\epsilon \leq b - x$ . Das Intervall

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

ist offen. Wenn  $x \in \mathbb{R}$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ , für jedes  $\epsilon > 0$ . Das Intervall

$$[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq a\} = \{a\}$$

ist nicht offen, weil kein  $\epsilon > 0$  gibt mit  $\mathcal{B}(a, \epsilon) \subseteq \{a\}$ . Das Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ist eine Umgebung von  $\frac{a+b}{2}$ , weil

$$a < \frac{a+b}{2} < b \quad \& \quad (a, b) \subseteq [a, b].$$

Das Intervall  $[a, b]$  ist keine offene Menge, weil für jedes  $\epsilon > 0$  gilt

$$\mathcal{B}(a, \epsilon) \not\subseteq [a, b] \quad \& \quad \mathcal{B}(b, \epsilon) \not\subseteq [a, b].$$

**BEISPIEL 2.1.6.** Seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$ . Die offene Kugel  $\mathcal{B}(x, \epsilon)$  ist offen. Sei  $y \in \mathcal{B}(x, \epsilon)$ . Also gilt

$$d(y, x) < \epsilon \Leftrightarrow \epsilon' = \epsilon - d(x, y) > 0.$$

Wir zeigen, dass

$$\mathcal{B}(y, \epsilon') \subseteq \mathcal{B}(x, \epsilon).$$

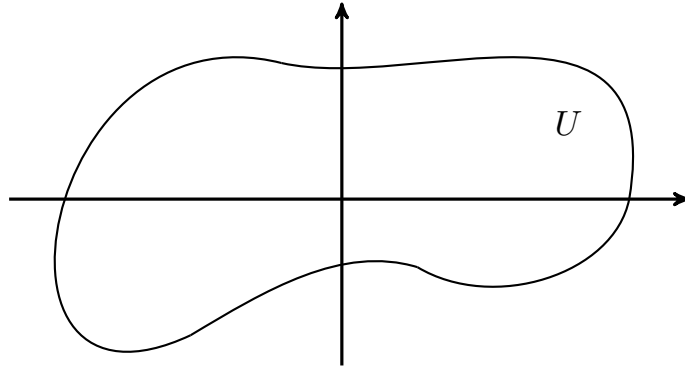
Sei  $z \in \mathcal{B}(y, \epsilon') \Leftrightarrow d(z, y) < \epsilon'$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) \\ &< \epsilon - d(x, y) + d(x, y) \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

d.h.  $z \in \mathcal{B}(x, \epsilon)$ . Die abgeschlossene Kugel  $\mathcal{B}(x, \epsilon]$  ist nicht offen, weil für jedes  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $d(y, x) = \epsilon$  gilt

$$\mathcal{B}(y, \epsilon') \not\subseteq \mathcal{B}(x, \epsilon],$$

für jedes  $\epsilon' > 0$ . Es existiert immer ein  $y \in \mathbb{R}^n$ , sodass gilt  $d(y, x) = \epsilon$  (Aufgabe). Auf ähnliche Art folgt, dass der Bereich  $U$ , der von der folgenden Kurve in  $\mathbb{R}^2$  umschlossen wird, offen ist.



SATZ 2.1.7. Sei  $n \geq 1$ .

- (i)  $\mathbb{R}^n$  und  $\emptyset$  sind offene Mengen.
- (ii) Wenn  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sind, dann sind  $U \cap V$  und  $U \cup V$  offen.
- (iii) Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $U_i$  ist offen für jedes  $i \in I$ . Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists i \in I (x \in U_i)\}$$

offen.

BEWEIS. (i) Wenn  $x \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Die Implikation

$$x \in \emptyset \Rightarrow \mathcal{B}(x, 1) \subseteq \emptyset$$

gilt trivialerweise.

(ii) Wir zeigen, dass der Durchschnitt  $U \cap V$  offen ist. Sei  $x \in U \cap V \Leftrightarrow x \in U$  &  $x \in V$ . Weil  $U$  offen ist, gibt es  $\epsilon_1 > 0$ , sodass gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon_1) \subseteq U$ . Weil  $V$  offen ist, gibt es  $\epsilon_2 > 0$  mit  $\mathcal{B}(x, \epsilon_2) \subseteq V$ . Sei

$$\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}.$$

Es gilt

$$\mathcal{B}(x, \epsilon) \subseteq V \cap U.$$

Sei  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $|y - x| < \epsilon \leq \epsilon_1$ . Also gilt  $y \in U$ . Auf ähnliche Art gilt  $|y - x| < \epsilon \leq \epsilon_2$ . Also gilt  $y \in V$ . Als Nächstes, zeigen wir, dass  $U \cup V$  offen ist. Wenn  $x \in U \cup V$ , dann  $x \in U$  oder  $x \in V$ . Wenn  $x \in U$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon_1) \subseteq U \subseteq U \cup V$ , für ein  $\epsilon_1 > 0$ . Wenn  $x \in V$ , dann gilt  $\mathcal{B}(x, \epsilon_2) \subseteq V \subseteq U \cup V$ , für ein  $\epsilon_2 > 0$ .

(iii) Aufgabe. □

Aus Satz folgt durch wiederholte Anwendung, dass ein Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen offen ist. Dies gilt nicht für unendliche Durchschnitte. Z.B. sind die Intervalle

$$\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right); \quad n \in \mathbb{N}^+$$

offen, aber ihr Durchschnitt

$$(0, 1] = \bigcap_{n \geq 1} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

ist nicht mehr offen. Das Kartesische Produkt von offenen Mengen in  $\mathbb{R}$  ist offen. Z.B. die Menge

$$(0, 1) \times (-1, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1) \ \& \ y \in (-1, 1)\}$$

ist offen in  $\mathbb{R}^2$ , und das Produkt

$$(0, 1) \times (-1, 1) \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (0, 1) \ \& \ y \in (-1, 1)\}$$

ist offen in  $\mathbb{R}^3$ .

DEFINITION 2.1.8. Eine Teilmenge  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement

$$F^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin F\}$$

offen ist.

BEISPIEL 2.1.9. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Das Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ist abgeschlossen, weil das Komplement von  $[a, b]$  die offene Menge

$$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

ist. Das Intervall

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

ist auch abgeschlossen, weil das Komplement von  $[a, +\infty)$  die offene Menge  $(-\infty, a)$  ist. Das Intervall

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$



ist auch abgeschlossen, weil das Komplement von  $(-\infty, b]$  die offene Menge  $(b, +\infty)$  ist.

BEISPIEL 2.1.10. Seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$ . Die abgeschlossene Kugel  $\mathcal{B}(x, \epsilon]$  ist abgeschlossen (Aufgabe).

SATZ 2.1.11. Sei  $n \geq 1$ .

(i)  $\mathbb{R}^n$  und  $\emptyset$  sind abgeschlossen.

(ii) Wenn  $F, K \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen sind, dann sind  $F \cap K$  und  $F \cup K$  abgeschlossen.

(iii) Sei  $(F_i)_{i \in I}$  eine Familie abgeschlossener Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $F_i$  ist abgeschlossen für jedes  $i \in I$ . Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I (x \in F_i)\}$$

abgeschlossen.

BEWEIS. Aufgabe. □

Aus Satz 2.1.11 folgt durch wiederholte Anwendung, dass eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist. Dies gilt nicht für unendliche Vereinigungen. Z.B. sind die Intervalle

$$\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]; \quad n \geq 2$$

abgeschlossen, aber ihre Vereinigung

$$(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

ist nicht mehr abgeschlossen, weil das Komplement von  $(0, 1)$  die nicht offene Menge  $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$  ist. Das Kartesische Produkt von abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}$  ist abgeschlossen. Z.B. die Menge

$$[0, 1] \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \ \& \ y \in [-1, 1]\}$$

ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$ , und das Produkt

$$[0, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1] \ \& \ y \in [-1, 1]\}$$

ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^3$ .

Die Mengen  $\mathbb{R}^n$  und  $\emptyset$  sind gleichzeitig offen und abgeschlossen. Das Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , ist weder offen noch abgeschlossen.

**2.2. Konvergenz von Folgen in  $\mathbb{R}^n$** 

DEFINITION 2.2.1. Sei  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten aus  $\mathbb{R}^n$ , d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (\alpha_{01}, \dots, \alpha_{0n}), \\ \alpha_1 &= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_k &= (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn}), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Die Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent* gegen den Punkt

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

in Zeichen

$$\alpha_k \xrightarrow{k} x, \quad \text{oder} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = x,$$

wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall k \geq N_\varepsilon (|\alpha_k - x| < \varepsilon),$$

d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$\sqrt{(\alpha_{k1} - x_1)^2 + \dots + (\alpha_{kn} - x_n)^2} < \varepsilon,$$

für alle  $k \geq N_\varepsilon$ .

SATZ 2.2.2. Sei  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten aus  $\mathbb{R}^n$  und seien die Folgen reeller Zahlen

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= (\alpha_{k1})_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_{01}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{k1}, \dots), \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha^n &= (\alpha_{kn})_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_{0n}, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{kn}, \dots). \end{aligned}$$

Genau dann konvergiert die Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , wenn

$$\alpha_{k1} \xrightarrow{k} x_1 \ \& \ \dots \ \& \ \alpha_{kn} \xrightarrow{k} x_n.$$

BEWEIS. Angenommen  $\alpha_k \xrightarrow{k} x$ . Wenn  $m \in \{1, \dots, n\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |\alpha_{km} - x_m| &= \sqrt{(\alpha_{km} - x_m)^2} \\ &\leq \sqrt{(\alpha_{k1} - x_1)^2 + \dots + (\alpha_{km} - x_m)^2 + \dots + (\alpha_{kn} - x_n)^2} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

für jedes  $k \geq N_\varepsilon^\alpha$ . Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass  $\alpha_{km} \xrightarrow{k} x_m$ , für jedes  $m \in \{1, \dots, n\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{(\alpha_{k1} - x_1)^2 + \dots + (\alpha_{kn} - x_n)^2} < \varepsilon &\Leftrightarrow \\ (\alpha_{k1} - x_1)^2 + \dots + (\alpha_{kn} - x_n)^2 < \varepsilon^2 &\Leftrightarrow \\ |\alpha_{k1} - x_1|^2 + \dots + |\alpha_{kn} - x_n|^2 < \varepsilon^2 &\Leftrightarrow \\ |\alpha_{k1} - x_1|^2 + \dots + |\alpha_{kn} - x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n}. \end{aligned}$$

Weil

$$|\alpha_{km} - x_m|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n},$$

für alle  $k \geq N_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}^{\alpha^m}$ , definieren wir

$$N_\varepsilon^\alpha = \max \left\{ N_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}^{\alpha^1}, \dots, N_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}^{\alpha^n} \right\}. \quad \square$$

**SATZ 2.2.3.** *Eine Teilmenge  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten  $\alpha_k \in F$ , die gegen einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  konvergiert, so liegt  $x$  in  $F$ .*

**BEWEIS.** Seien  $F$  abgeschlossen und  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten  $\alpha_k \in F$ , die gegen einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  konvergiert. Angenommen,  $x$  läge nicht in  $F$ . Da  $F^c$  offen ist, ist dann  $F^c$  eine Umgebung von  $x$ , d.h. es gibt  $\varepsilon > 0$ , sodass gilt  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq F^c$ . Nach der Definition der Konvergenz gibt es ein  $N_\varepsilon^\alpha \in \mathbb{N}$ , sodass  $\alpha_k \in F^c$  für alle  $k \geq N_\varepsilon^\alpha$ , also gilt  $F \cap F^c \neq \emptyset$ . Das ist ein Widerspruch.

Zur Umkehrung. Das Folgenkriterium sei erfüllt; wir zeigen, dass  $F^c$  offen ist. Sei  $x \in F^c$ . Wir zeigen, dass ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq F^c$ . Wäre dies nicht der Fall, könnten wir zu jedem  $k \in \mathbb{N}^+$  ein  $\alpha_k \in F$  finden mit

$$|\alpha_k - x| < \frac{1}{k}.$$

Dann gilt  $\alpha_k \xrightarrow{k} x \in F$ , was ein Widerspruch zu  $x \in F^c$  steht.  $\square$

**DEFINITION 2.2.4.** Eine Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Punkten aus  $\mathbb{R}^n$  heißt *Cauchy Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall k, m \geq C_\varepsilon (|\alpha_k - \alpha_m| < \varepsilon).$$

**SATZ 2.2.5.** *Sei  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten aus  $\mathbb{R}^n$  und seien die Folgen reeller Zahlen*

$$\alpha^1 = (\alpha_{k1})_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_{01}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{k1}, \dots),$$

.....

$$\alpha^n = (\alpha_{kn})_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_{0n}, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{kn}, \dots).$$

Genau dann ist die Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge, wenn die Folge  $\alpha^m$  eine Cauchy Folge ist, für alle  $m \in \{1, \dots, n\}$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

SATZ 2.2.6. Sei  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten aus  $\mathbb{R}^n$ .

(i) Wenn  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergent Folge ist, dann ist  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge.

(ii) Wenn  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge ist, dann ist  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge.

BEWEIS. Aufgabe. □

### 2.3. Stetigkeit von Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

DEFINITION 2.3.1. Seien  $m, n \geq 1$ ,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , und  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ . Die Funktion  $f$  heißt *stetig im  $x_0$* , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. wenn für jede Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Punkten aus  $\mathbb{R}^m$  gilt

$$[\alpha_k \xrightarrow{k} x_0] \Rightarrow [f(\alpha_k) \xrightarrow{k} f(x_0)].$$

Die Funktion  $f$  heißt *stetig auf  $\mathbb{R}^m$* , falls  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  stetig ist. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $g$  heißt *stetig auf  $U$* , falls  $g$  in jedem Punkt  $x_0 \in U$  stetig ist.

BEISPIEL 2.3.2. Die Funktion  $\text{pr}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$ , definiert durch

$$\text{pr}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i; \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ist stetig (Aufgabe).

BEISPIEL 2.3.3. Die Funktion  $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$+(x, y) = x + y; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ist stetig. Seien  $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit

$$(x_k, y_k) \xrightarrow{k} (x, y) \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{k} x \ \& \ y_k \xrightarrow{k} y.$$

Dann gilt

$$+(x_k, y_k) = x_k + y_k \xrightarrow{k} x + y.$$

Auf ähnlicher Art zeigen wir, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \cdot(x, y) &= x \cdot y; & (x, y) &\in \mathbb{R}^2, \\ \div: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \div(x, y) &= \frac{x}{y}; & (x, y) &\in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

stetig sind.

**SATZ 2.3.4.** *Seien  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  stetige Funktionen. Dann ist die Komposition  $g \circ f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ , wobei*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)); \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

*auch stetig.*

BEWEIS. Aufgabe. □

**SATZ 2.3.5.** *Sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  und seien die Komponenten-Funktionen  $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , werden definiert durch*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \text{pr}_1(f(x)); & x &\in \mathbb{R}^m, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x) &= \text{pr}_n(f(x)); & x &\in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

*d.h.*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

*für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten  $f_1, \dots, f_n$  stetig sind.*

BEWEIS. Es folgt aus Satz 2.2.2 (Aufgabe). □

**COROLLAR 2.3.6.** *Seien  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann sind die Funktionen*

$$\begin{aligned} f + g: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}, & (f + g)(x) &= f(x) + g(x); & x &\in \mathbb{R}^m, \\ f \cdot g: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}, & (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x); & x &\in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

*auch stetig. Falls  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ , dann ist die Funktion*

$$f \div g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \div g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

*auch stetig.*

BEWEIS. Aufgabe. □

COROLLAR 2.3.7. (i) Die übliche Norm  $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetige Funktion.

(ii) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $d_{x_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$d_{x_0}(x) = d(x, x_0); \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei  $d$  die übliche Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  ist, stetig.

BEWEIS. Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{pr}_i^2(x)}.$$

Der Rest ist Aufgabe. □

COROLLAR 2.3.8. Ein Monom vom Grad  $r \in \mathbb{N}$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist eine Funktion

$$M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$M(x_1, \dots, x_n) = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n},$$

wobei

$$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n = r.$$

Eine Polynom-Funktion vom Grad  $\leq r$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist eine Linearkombination  $P$  von Monomen vom Grad  $\leq r$ , d.h.

$$P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1 + \dots + m_n \leq r} a_{m_1 \dots m_n} x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n},$$

wobei  $a_{m_1 \dots m_n} \in \mathbb{R}$ .

(i) Ein Monom vom Grad  $r$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist stetig.

(ii) Eine Polynom-Funktion vom Grad  $\leq r$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist stetig.

BEWEIS. Aufgabe. □

THEOREM 2.3.9 ( $\varepsilon$ - $\delta$  Kriterium der Stetigkeit). Eine Funktion  $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann in  $x_0 \in U$  stetig, wenn gilt

$$(K) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

BEWEIS. Angenommen,  $f$  ist stetig in  $x_0$  und das Kriterium (K) ist nicht erfüllt. D.h.

$$\text{nicht (K):} \quad \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in U (|x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

Insbesondere gibt es zu  $\delta = \frac{1}{n}$  ein  $x_n \in U$  mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Also gilt  $x_n \xrightarrow{n} x$ , woraus folgt  $f(x_n) \xrightarrow{n} f(x)$ . Dies steht aber in Widerspruch zu "nicht (K)". Also ist das Kriterium (K) erfüllt.

Sei das Kriterium (K) erfüllt und sei  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $U$  mit  $\lim \alpha_k = x_0$ . Wir zeigen, dass  $\lim f(\alpha_k) = f(x_0)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt  $N_{\delta(\varepsilon)}^\alpha \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$\forall k \geq N_{\delta(\varepsilon)}^\alpha (|\alpha_k - x_0| < \delta(\varepsilon)),$$

wobei aus (K) folgt

$$\forall x \in U (|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Also gilt

$$|f(\alpha_k) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

für alle  $k \geq N_{\delta(\varepsilon)}^\alpha$ , d.h.  $f(\alpha_k) \xrightarrow{k} f(x_0)$ . □

**SATZ 2.3.10.** Sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

(i) Die Funktion  $f$  ist genau dann im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  stetig, wenn zu jeder Umgebung  $V_{f(x_0)}$  von  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U_{x_0}$  von  $x_0$  existiert mit  $f(U_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)}$ .

(ii) Die Funktion  $f$  ist genau dann auf ganz  $\mathbb{R}^m$  stetig, wenn das Urbild

$$f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \in V\}$$

jeder offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen in  $\mathbb{R}^m$  ist.

**BEWEIS.** (i) ist eine Umformulierung des Kriteriums (K).

(ii) Seien  $f$  stetig und  $V$  offen in  $\mathbb{R}^n$ . Wir zeigen, dass  $f^{-1}(V)$  offen ist. Sei  $x_0 \in f^{-1}(V)$ . Da  $V$  Umgebung von  $f(x_0)$  ist, gibt es aus (i) eine Umgebung  $U_{x_0}$  von  $x_0$  mit  $f(U_{x_0}) \subseteq V \Leftrightarrow U_{x_0} \subseteq f^{-1}(V)$ . D.h.  $f^{-1}(V)$  ist offen.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass das Urbild jeder offenen Menge offen ist und sei  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ . Ist  $V_{f(x_0)}$  eine Umgebung von  $f(x_0)$ , so gibt es  $\varepsilon > 0$  mit

$$f(x_0) \in \mathcal{B}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V_{f(x_0)}.$$

Dann ist  $U_{x_0} = f^{-1}(V_{f(x_0)})$  offen,  $x_0 \in U_{x_0}$  und  $f(U_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)}$ . Aus (i) folgt, dass  $f$  in  $x_0$  stetig ist. □

**BEISPIEL 2.3.11.** Sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann sind die Mengen

$$[f < a] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) < a\} = f^{-1}(-\infty, a),$$

$$[f > a] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) > a\} = f^{-1}(a, +\infty),$$

offen und die Menge

$$[f = a] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = a\}$$

abgeschlossen (warum?).

## 2.4. Stetigkeit und Linearität

Wir zeigen, dass jede lineare Abbildung  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist.

**SATZ 2.4.1.** *Sei  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung und sei  $A = [a_{ij}] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  die Matrix von  $T$ .*

(i) *Es gibt  $C \geq 0$ , sodass gilt*

$$|T(x)| \leq C|x|,$$

*für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ .*

(ii) *Die Funktion  $T$  ist stetig.*

**BEWEIS.** (i) Aus Theorem 1.8.5 folgt

$$T(x) = Ax; \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Also gilt

$$T(x) = \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \right),$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ . Sei

$$B = \max \{ |a_{ij}| \mid i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ j \in \{1, \dots, m\} \}.$$

Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Aus der Cauchy-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right| &= | \langle (a_{i1}, \dots, a_{im}), (x_1, \dots, x_m) \rangle | \\ &\leq |(a_{i1}, \dots, a_{im})| |(x_1, \dots, x_m)| \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^m B^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} \\
&= \sqrt{mB^2}|x| \\
&= \sqrt{m}B|x|.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
|T(x)|^2 &= \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j \right)^2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \right)^2 \\
&= \left| \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j \right|^2 + \dots + \left| \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \right|^2 \\
&\leq mB^2|x|^2 + \dots + mB^2|x|^2 \\
&= nmB^2|x|^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|T(x)| \leq C|x|, \quad C = \sqrt{nm}B.$$

(ii) Wir zeigen, dass das Kriterium (K) erfüllt ist. Seien  $\varepsilon > 0$  und  $x, x_0 \in \mathbb{R}^m$  mit  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ , wobei  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{C}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(x_0)| &= |T(x - x_0)| \\
&\leq C|x - x_0| \\
&< C \frac{\varepsilon}{C} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

## 2.5. Kurven im $\mathbb{R}^n$

DEFINITION 2.5.1. Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  der Form

$(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$ . Eine *Kurve* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetige Funktion

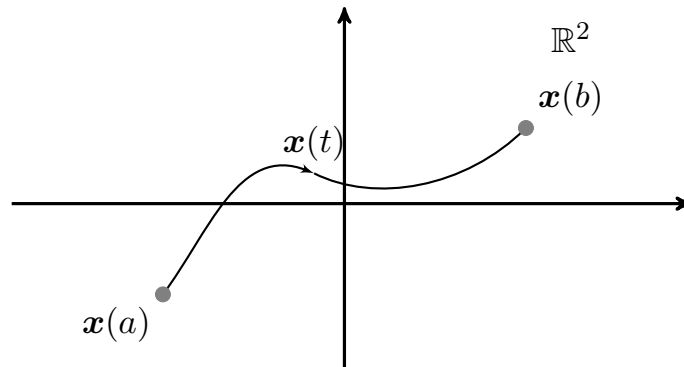
$$\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in I.$$

Wir schreiben

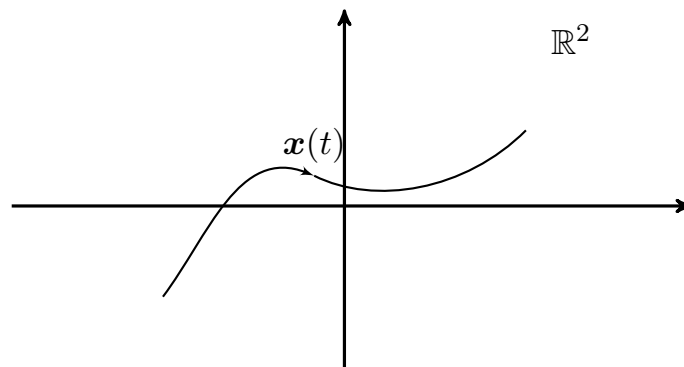
$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in I,$$

wobei  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  die  $i$ -Komponente-Funktion von  $\mathbf{x}$  ist, für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Die Kurve  $\mathbf{x}$  heißt *differenzierbar* (bzw. *stetig differenzierbar*), wenn alle Komponenten-Funktionen  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  von  $\mathbf{x}$  differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar) sind. Ein Punkt  $P \in \mathbb{R}^n$  gehört zur Kurve  $\mathbf{x}$ , oder  $P$  liegt auf  $\mathbf{x}$ , wenn es  $t \in I$  gibt, sodass gilt  $P = \mathbf{x}(t)$ .

Sei die Kurve  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Man fasst die Variable  $t \in [a, b]$  als Zeit und  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$  als Ort auf. Die Kurve  $\mathbf{x}$  beschreibt dann die zeitliche Bewegung eines Punktes im  $\mathbb{R}^2$ .



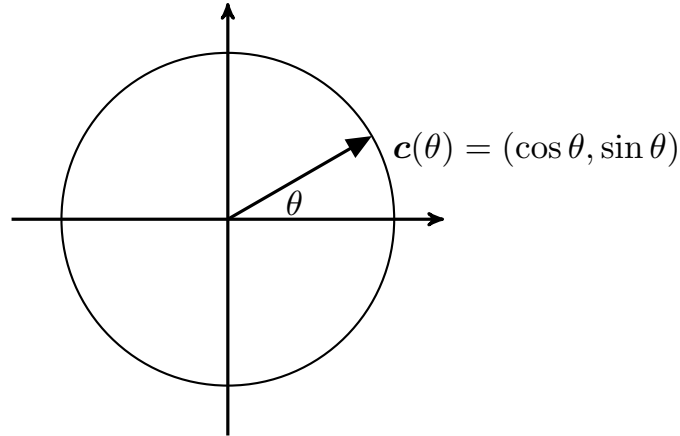
Eine Kurve  $\mathbf{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sieht wie unten aus.



BEISPIEL 2.5.2. Sei die Kurve  $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$\mathbf{c}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta); \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Die Kurve  $\mathbf{c}$  ist der Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ .



Die Kurve  $\mathbf{c}$  ist stetig differenzierbar, weil  $\mathbf{c}(\theta) = (c_1(\theta), c_2(\theta))$ , wobei die Komponenten von  $\mathbf{c}$  die stetig differenzierbaren Funktionen  $c_1(\theta) = \cos \theta$  und  $c_2(\theta) = \sin \theta$  sind. Für jedes  $t \in [0, 2\pi]$  gilt

$$\cos' \theta = -\sin \theta \quad \& \quad \sin' \theta = \cos \theta.$$

Dartüber hinaus ist  $\mathbf{c}$  eine *geschlossene* Kurve, d.h.  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(2\pi)$ .

BEISPIEL 2.5.3. Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^2$  mit  $y_0 \neq (0, 0)$ . Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x_0 + ty_0; \quad t \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  durch den Punkt  $x_0$  (weil  $f(0) = x_0$ ) mit Richtungsvektor  $y_0$ .

DEFINITION 2.5.4. Sei  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve. Für  $t_0 \in I$  heißt

$$\mathbf{x}'(t_0) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)) = \left( \frac{dx_1}{dt}(t_0), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t_0) \right)$$

der *Tangentenvektor* der Kurve  $\mathbf{x}$  zum Parameterwert  $t_0$ . Falls  $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , heißt der auf die Norm 1 normierte Vektor

$$\frac{\mathbf{x}'(t_0)}{|\mathbf{x}'(t_0)|}$$

*Tangenten-Einheitsvektor*. Wenn  $\mathbf{x}$  eine stetige differenzierbare Kurve ist, dann ist die *Ableitung Kurve* von  $\mathbf{x}$  die Kurve  $\mathbf{x}' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$t \mapsto \mathbf{x}'(t),$$

für jedes  $t \in I$ .

Seien  $\mathbf{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve im  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$ , und  $h \in \mathbb{R}$ . Der Tangentialvektor  $\mathbf{x}'(t_0)$  lässt sich als Limes von Sekanten auffassen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h} &= \frac{1}{h} [(x_1(t_0 + h), \dots, x_n(t_0 + h)) - (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))] \\ &= \frac{1}{h} (x_1(t_0 + h) - x_1(t_0), \dots, x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)) \\ &= \left( \frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right), \end{aligned}$$

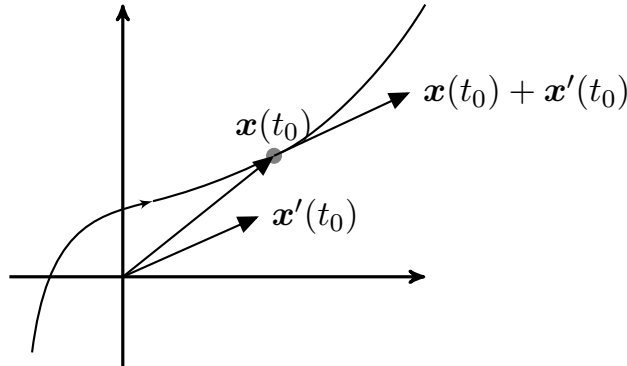
also gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h} = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)).$$

*Physikalische Interpretation von  $\mathbf{x}'(t_0)$ :* Der Tangentialvektor  $\mathbf{x}'(t_0)$  ist der Geschwindigkeitsvektor im Zeitpunkt  $t$  der durch  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschriebenen Bewegung und

$$|\mathbf{x}'(t_0)| = \sqrt{|x_1'(t_0)|^2 + \dots + |x_n'(t_0)|^2}$$

ist der Betrag der Geschwindigkeit. Jeder Punkt im  $\mathbb{R}^2$  kann durch einen zugehörigen Ursprungsvektor eindeutig charakterisiert werden. Das ist der Vektor, der vom Ursprung der Euklidischen Ebene auf den Punkt zeigt. Wenn dieser Vektor parallel zu  $y$ -Achse um  $y_0$  und parallel zur  $x$ -Achse um  $t_0$  verschoben wird, wobei  $\mathbf{x}(t_0) = (t_0, y_0)$ , erhalten wir einen Vektor, der im Punkt  $\mathbf{x}(t_0)$  tangential zur Kurve  $\mathbf{x}$  orientiert ist.



**SATZ 2.5.5.** Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbare Kurven,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion.

(i) Die Funktion  $\mathbf{x} + \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t),$$

für jedes  $t \in I$ , ist eine differenzierbare Kurve mit

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})'(t) = \mathbf{x}'(t) + \mathbf{y}'(t),$$

für jedes  $t \in I$ .

(ii) Die Funktion  $\lambda \mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$(\lambda \mathbf{x})(t) = \lambda \mathbf{x}(t),$$

für jedes  $t \in I$ , ist eine differenzierbare Kurve mit

$$(\lambda \mathbf{x})'(t) = \lambda \mathbf{x}'(t),$$

für jedes  $t \in I$ .

(iii) Die Funktion  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle(t) = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle,$$

für jedes  $t \in I$ , wobei  $\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle$  das übliche Skalarprodukt von  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$  ist, ist eine differenzierbare Funktion mit

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle'(t) = \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}'(t) \rangle,$$

für jedes  $t \in I$ .

(iv) Die Funktion  $\mathbf{x}^2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$(\mathbf{x}^2)(t) = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle,$$

für jedes  $t \in I$ , ist eine differenzierbare Funktion mit

$$(\mathbf{x}^2)'(t) = 2\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle,$$

für jedes  $t \in I$ .

(v) Die Funktion  $f\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$(f\mathbf{x})(t) = f(t)\mathbf{x}(t),$$

für jedes  $t \in I$ , ist eine differenzierbare Kurve mit

$$(f\mathbf{x})'(t) = f'(t)\mathbf{x}(t) + f(t)\mathbf{x}'(t),$$

für jedes  $t \in I$ .

BEWEIS. Wir zeigen nur (iii) und der Rest ist Aufgabe. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle(t) &= \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(t)y_i(t) \\ &= x_1(t)y_1(t) + \dots + x_n(t)y_n(t), \end{aligned}$$

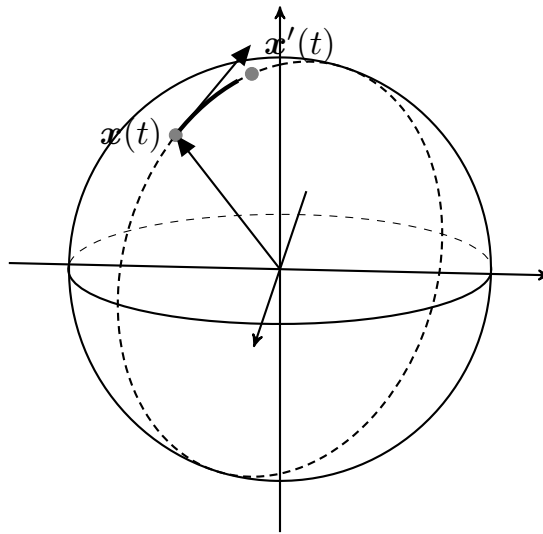
also gilt

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle'(t_0) &= \\
 &= [x_1(t)y_1(t)]'(t_0) + \dots + [x_n(t)y_n(t)]'(t_0) \\
 &= [x_1'(t_0)y_1(t_0) + x_1(t_0)y_1'(t_0)] + \dots + [x_n'(t_0)y_n(t_0) + x_n(t_0)y_n'(t_0)] \\
 &= [x_1'(t_0)y_1(t_0) + \dots + x_n'(t_0)y_n(t_0)] + [x_1(t_0)y_1'(t_0) + \dots + x_n(t_0)y_n'(t_0)] \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i'(t_0)y_i(t_0) + \sum_{i=1}^n x_i(t_0)y_i'(t_0) \\
 &= \langle \mathbf{x}'(t_0), \mathbf{y}(t_0) \rangle + \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}'(t_0) \rangle. \quad \square
 \end{aligned}$$

**COROLLAR 2.5.6.** Sei  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve, sodass gilt: für jedes  $t \in I$  die Norm von  $\mathbf{x}(t)$  ist konstant, d.h. es gibt  $r > 0$  mit

$$|\mathbf{x}(t)| = r > 0,$$

für jedes  $t \in I$ . Dann gilt: für jedes  $t \in I$  der Ortsvektor  $\mathbf{x}(t)$  von  $\mathbf{x}$  im Zeitpunkt  $t$  ist orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{x}'(t)$  von  $\mathbf{x}$  im Zeitpunkt  $t$ .



**BEWEIS.** Wenn  $|\mathbf{x}(t)| = r > 0$  für jedes  $t \in I$ , dann liegt  $\mathbf{x}(t)$  auf dem Kugel mit Mittelpunkt  $(0, \dots, 0)$  und Radius  $r$ . Es gilt

$$r^2 = |\mathbf{x}(t)|^2 = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle(t).$$

Weil die Funktion  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  eine konstante Funktion in  $I$  ist, aus Satz 2.5.5(iv) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle'(t_0) = 2\langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}'(t_0) \rangle \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}'(t_0) \rangle \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}(t_0) \perp \mathbf{x}'(t_0). \quad \square \end{aligned}$$

## 2.6. Die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve

DEFINITION 2.6.1. Sei  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve, d.h. eine differenzierbare Kurve mit einer stetigen Ableitung  $\mathbf{x}'$ . Die *Länge*  $L_{ab}(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{x}$  zwischen den Punkten  $\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)$ , wobei  $a, b \in I$  mit  $a \leq b$ , ist definiert durch

$$L_{a,b}(\mathbf{x}) = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

Nach Definition der üblichen Norm auf  $\mathbb{R}^2$  es gilt

$$L_{a,b}(\mathbf{x}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}(t)\right)^2} dt,$$

wobei  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ . Nach Definition der üblichen Norm auf  $\mathbb{R}^3$  es gilt

$$L_{a,b}(\mathbf{x}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}(t)\right)^2} dt,$$

wobei  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . Nach Definition der üblichen Norm auf  $\mathbb{R}^n$  es gilt

$$L_{a,b}(\mathbf{x}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}(t)\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}(t)\right)^2} dt,$$

wobei  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ .

BEISPIEL 2.6.2. Sei  $\mathbf{c}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  der Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ , wobei  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}'(\theta)| &= \sqrt{c_1'(\theta)^2 + c_2'(\theta)^2} \\ &= \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1} \end{aligned}$$

$$= 1,$$

also gilt

$$\begin{aligned} L_{0,2\pi}(\mathbf{c}) &= \int_0^{2\pi} |\mathbf{c}'(\theta)| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi - 0 \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.6.3. Sei die stetig differenzierbare Kurve  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

$$\mathbf{x}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t),$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Die Ableitung Kurve  $\mathbf{x}'$  von  $\mathbf{x}$  ist die Kurve

$$\mathbf{x}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t),$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$ . Es gelten

$$|\mathbf{x}(t)| = e^t \quad \& \quad |\mathbf{x}'(t)| = \sqrt{2}e^t \quad \& \quad \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) \rangle = e^{2t},$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Also gilt

$$\frac{\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{|\mathbf{x}'(t)||\mathbf{x}(t)|} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2}e^t e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ , dh. der Winkel zwischen  $\mathbf{x}'(t)$  und  $\mathbf{x}(t)$  ist  $\frac{\pi}{4}$ , für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Darüber hinaus es gilt

$$L_{0,1}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}(e - 1).$$

BEISPIEL 2.6.4. Die *Zykloide* ist die Kurve

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t); \quad t \in \mathbb{R},$$

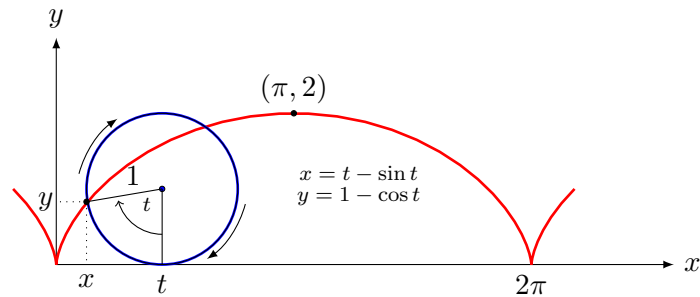
und sie beschreibt die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1, der auf der  $x$ -Achse der  $x$ - $y$ -Ebene abrollt. Wir wollen die Länge des Teils der Zykloide berechnen, der zu den Parameterwerten  $0 \leq t \leq 2\pi$  gehört, also den Bogen  $ABC$  in Bild, wobei

$$A = f(0) = (0, 0),$$

$$B = f(\pi) = (\pi, 2),$$



$$C = f(2\pi) = (2\pi, 0).$$



Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  gelten

$$f'(t) = (1 - \cos t, \sin t),$$

und

$$\begin{aligned} |f'(t)|^2 &= |(1 - \cos t, \sin t)|^2 \\ &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \\ &= 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 2 - 2 \cos t, \end{aligned}$$

also gilt

$$|f'(t)|^2 = 2 - 2 \cos t = 4 \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right).$$

Wenn  $t \in [0, 2\pi]$ , dann gilt

$$|f'(t)| = 2 \left| \sin \left( \frac{t}{2} \right) \right| = 2 \sin \left( \frac{t}{2} \right).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} L_{0,2\pi}(f) &= \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 2 \frac{1}{2} \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt \\ &= 4 \int_0^\pi \sin u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4[-\cos u]_0^\pi \\
&= 4(-\cos \pi + \cos 0) \\
&= 4 \cdot 2 \\
&= 8.
\end{aligned}$$

## 2.7. Partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen sind nichts anderes als die gewöhnlichen Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen, die man erhält, wenn man alle Veränderliche bis auf eine festhält.

Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ . Nach Definition gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Wenn  $h \in \mathbb{R}$  ist mit  $|h| < \varepsilon$ , dann gilt

$$|(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)| = \sqrt{h^2} = |h| < \varepsilon,$$

d.h.,

$$(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) \in \mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq U,$$

und der folgende Begriff ist wohl-definiert.

DEFINITION 2.7.1. Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ . Angenommen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen

$$D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h},$$

wobei  $D_i f(x)$  heißt die *i-te partielle Ableitung* von  $f$  in  $x$ . Die Funktion  $f$  heißt *partiell differenzierbar*, falls  $D_i f(x)$  für alle  $x \in U$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  existiert. Die Funktion  $f$  heißt *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen

$$D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_i f(x); \quad x \in U,$$

stetig sind.

Damit man die *i-te partielle Ableitung* definieren kann, ist nicht unbedingt notwendig, dass  $U$  offen ist. Es genügt, dass wenigstens eine Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim h_k = 0$  existiert, sodass  $h_k \neq 0$  und  $(x_1, \dots, x_i + h_k, \dots, x_n) \in U$ .

$U$ , für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wenn  $B_n := \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$  ist, dann gilt

$$D_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

BEISPIEL 2.7.2. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(x, y) = x^2 y^3; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es gelten

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h} \\ &= y^3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\ &= y^3 2x \\ &= 2xy^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 (y + h)^3 - x^2 y^3}{h} \\ &= x^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(y + h)^3 - y^3}{h} \\ &= x^2 3y^2 \\ &= 3x^2 y^2. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.7.3. Sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(x, y) = e^{x^2 + y^2}; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Da für die Funktion einer Variablen

$$f(x) = e^{x^2 + c^2}; \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt  $f'(x) = 2xe^{x^2+c^2}$ , folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Die partielle Ableitung in der  $i$ -ten Koordinatenrichtung ist also nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung nach der  $i$ -ten Variablen bei Festhaltung der übrigen  $n - 1$  Veränderlichen. Deshalb gelten für die partielle Ableitungen analoge Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Ableitungen.

Seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in U$  mit  $D_i f(x), D_i g(x) \in \mathbb{R}$ . Es gelten:

$$D_i(f + g)(x) = D_i f(x) + D_i g(x),$$

$$D_i(\lambda f)(x) = \lambda D_i f(x),$$

für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Also, die Menge

$$D(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist partiell differenzierbar}\}$$

ein Vektorraum ist, und die Funktion

$$D_i^x : D(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto D_i f(x); \quad f \in D(U),$$

eine lineare Abbildung ist, für jedes  $x \in U$  und jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

DEFINITION 2.7.4. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$D_1 f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \in \mathbb{R}, \dots, D_n f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt der Vektor

$$\begin{aligned} (\text{grad} f)(x) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \\ &= \left( D_1 f(x), \dots, D_n f(x) \right) \end{aligned}$$

der *Gradient* von  $f$  im Punkt  $x$ .

BEISPIEL 2.7.5. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $f(x, y) = x^2 y^3$ . Dann gilt

$$(\text{grad} f)(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2).$$

Weil  $D_i^x$  eine lineare Abbildung ist, dann gelten:

$$(\text{grad}(f + g))(x) = (\text{grad}f)(x) + (\text{grad}g)(x),$$

$$(\text{grad}(\lambda f))(x) = \lambda(\text{grad}f)(x),$$

für alle  $f, g \in D(U)$ ,  $x \in U$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Darüber hinaus gelten:

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}f + \text{grad}g,$$

$$\text{grad}(\lambda f) = \lambda \text{grad}f.$$

DEFINITION 2.7.6. Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen

$$D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_i f(x); \quad x \in U,$$

selbst wieder partiell differenzierbar, so heißt  $f$  *zweimal partiell differenzierbar*. Mann kann die partiellen Ableitungen 2. Ordnung

$$D_j D_i f$$

bilden. Allgemeiner definiert man durch Rekursion: Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  *$k+1$ -mal partiell differenzierbar*, wenn sie  $k$ -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f(x); \quad x \in U,$$

partiell differenzierbar sind.

BEISPIEL 2.7.7. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 y^3$ . Es gelten

$$D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 \quad \& \quad D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2,$$

und für die Funktionen  $D_1 f, D_2 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gelten

$$\begin{aligned} D_1 D_1 f(x, y) &= D_1^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (D_1(D_1 f))(x, y) = \\ &= \frac{\partial(2xy^3)}{\partial x}(x, y) = 2y^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 D_2 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (D_1(D_2 f))(x, y) = \\ &= \frac{\partial(3x^2 y^2)}{\partial x}(x, y) = 6xy^2, \end{aligned}$$

$$D_2 D_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = (D_2(D_1 f))(x, y) =$$

$$\frac{\partial(2xy^3)}{\partial y}(x, y) = 6xy^2,$$

$$\begin{aligned} D_2 D_2 f(x, y) &= D_2^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (D_2(D_2 f))(x, y) = \\ &= \frac{\partial(3x^2 y^2)}{\partial y}(x, y) = 6x^2 y. \end{aligned}$$

Es gilt

$$2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right)^2 = (2xy^3)^2 = 4x^2 y^6.$$

Aber

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = 6xy^2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y).$$

Ein Satz von H. A. Schwarz sagt, dass es bei  $k$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf die Reihenfolge der Differentiation nicht ankommt.

BEISPIEL 2.7.8. Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y, z) = x^2 y z^3; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Es gelten:

$$D_1 f(x, y, z) = 2xyz^3 \quad D_2 D_1 f(x, y, z) = 2xz^3 \quad D_3 D_2 D_1 f(x, y, z) = 6xz^2,$$

and

$$D_3 f(x, y, z) = 3x^2 y z^2 \quad D_2 D_3 f(x, y, z) = 3x^2 z^2 \quad D_1 D_2 D_3 f(x, y, z) = 6xz^2,$$

d.h.

$$D_3 D_2 D_1 f(x, y, z) = 6xz^2 = D_1 D_2 D_3 f(x, y, z).$$

Darüber hinaus es gelten:

$$\begin{aligned} D_3 D_2 D_1 f(x, y, z) &= D_3 D_1 D_2 f(x, y, z) \\ &= D_1 D_3 D_2 f(x, y, z) \\ &= D_1 D_2 D_3 f(x, y, z). \end{aligned}$$

### 2.8. Die Kettenregel

BEMERKUNG 2.8.1. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i)  $f$  ist differenzierbar im Punkt  $x_0$ .

(ii) Es gibt  $\varepsilon > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , und eine Funktion  $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + |h|g(h),$$

für jedes  $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , und

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0.$$

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Da  $f$  differenzierbar im Punkt  $x_0$  ist, gilt

$$a = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Wenn  $h \neq 0$ , dann setzen wir

$$\phi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0),$$

und wenn  $h = 0$ , dann definieren wir  $\phi(0) = 0$ . Offensichtlich gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0,$$

und für jedes  $h$  in eine  $\varepsilon$ -Umgebung von 0 gilt:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\phi(h).$$

Wir definieren  $g(h) = \phi(h)$ , wenn  $h \geq 0$ , und  $g(h) = -\phi(h)$ , wenn  $h < 0$ . Dann gilt:

$$|h|g(h) = h\phi(h).$$

Also gelten:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + |h|g(h),$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wenn  $h \neq 0$ , dann gilt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{ah + |h|g(h)}{h} = a + \frac{|h|}{h}g(h),$$

also gilt  $a = f'(x_0)$ . □

DEFINITION 2.8.2. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist *differenzierbar* im Punkt  $x_0$ , falls

(a) Der Gradient von  $f$  im Punkt  $x_0$

$$\text{grad}f(x_0) := (D_1f(x_0), \dots, D_nf(x_0)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

existiert, und

(b) es gibt eine Funktion  $g: \mathcal{B}((0, \dots, 0), \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} g(h) = 0,$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n + |h|g(h) \\ &= \langle (\text{grad}f)(x_0), h \rangle + |h|g(h). \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist *differenzierbar in  $U$* , wenn  $f$  differenzierbar in jedem Punkt von  $U$  ist.

SATZ 2.8.3. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist *differenzierbar im Punkt  $x_0$* , wenn  $f$  *partiell differenzierbar* ist und die Funktion

$$D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_i f(x); \quad x \in U,$$

*stetig im Punkt  $x_0$*  ist, für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

In  $\mathbb{R}$  die Kettenregel ist die Gleichung

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t),$$

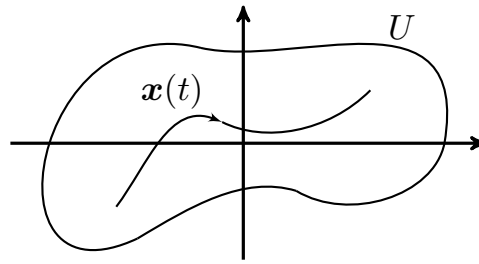
wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen sind

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{g} & U \subseteq \mathbb{R} \\ & \searrow f \circ g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}. \end{array}$$

SATZ 2.8.4 (Kettenregel). Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, und  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve mit

$$\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \mid t \in I\} \subseteq U,$$





wobei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Wenn  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $U$  ist, dann ist die Funktion

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\mathbf{x}} & U \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \searrow f \circ \mathbf{x} & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$f \circ \mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$(f \circ \mathbf{x})'(t) = \langle (\text{grad} f)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle,$$

für jedes  $t \in I$ .

BEWEIS. Seien

$$Q(t, h) = \frac{f(\mathbf{x}(t+h)) - f(\mathbf{x}(t))}{h},$$

und

$$K = K(t, h) = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t).$$

Da  $\mathbf{x}(t+h) = K + \mathbf{x}(t)$  gilt

$$Q(t, h) = \frac{f(\mathbf{x}(t) + K) - f(\mathbf{x}(t))}{h}.$$

Weil  $f$  differenzierbar in  $U$  ist und  $\mathbf{x}(t) \in U$ , ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\mathbf{x}(t)$ , für jedes  $t \in I$ . Nach Definition 2.8.2 es gibt Funktion  $g$  mit

$$f(\mathbf{x}(t) + K) - f(\mathbf{x}(t)) = \langle (\text{grad} f)(\mathbf{x}(t)), K \rangle + |K|g(K),$$

und

$$\lim_{|K| \rightarrow 0} g(K) = 0.$$

Also gilt,

$$\begin{aligned} Q(t, h) &= \frac{f(\mathbf{x}(t+h)) - f(\mathbf{x}(t))}{h} \\ &= \left\langle (\text{grad}f)(\mathbf{x}(t)), \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right\rangle + \frac{|\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)|}{h} g(K) \\ &= \left\langle (\text{grad}f)(\mathbf{x}(t)), \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right\rangle \pm \left| \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right| g(K). \end{aligned}$$

Wenn  $h \rightarrow 0$ , dann gilt

$$\left\langle (\text{grad}f)(\mathbf{x}(t)), \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right\rangle \rightarrow \langle (\text{grad}f)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle,$$

und

$$\pm \left| \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right| g(K) \rightarrow \pm |\mathbf{x}'(t)| 0 = 0,$$

weil, wenn  $h \rightarrow 0$ , dann gilt  $K = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ , und verwenden wir die Gleichung  $\lim_{|K| \rightarrow 0} g(K) = 0$ .  $\square$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{x})'(t) &= \langle (\text{grad}f)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle \\ &= \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t)) \right), (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) x_i'(t) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_n}{dt}(t), \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Wir schreiben einfacher:

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.8.5. Seien die Funktionen  $\mathbf{x}(t) = (e^t, t, t^2) = (x(t), y(t), z(t))$  und  $f(x, y, z) = x^2yz$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{x}} & \mathbb{R}^3 \\ & \searrow f \circ \mathbf{x} & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Aus Satz 2.8.3 ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}^3$ . Es gelten:

$$\mathbf{x}'(t) = (e^t, 1, 2t),$$

$$(\operatorname{grad} f)(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y),$$

$$(\operatorname{grad} f)(\mathbf{x}(t)) = (\operatorname{grad} f)(e^t, t, t^2) = (2e^t t^3, e^{2t} t^2, e^{2t} t).$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(t)) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}(t)) \frac{dz}{dt} \\ &= 2e^t t^3 e^t + e^{2t} t^2 + e^{2t} t 2t \\ &= 2e^{2t} t^3 + e^{2t} t^2 + e^{2t} 2t^2. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.8.6. Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, und sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $g(t) = f(P + tQ)$ , für jedes  $t \in \mathbb{R}$ , wobei  $P, Q \in \mathbb{R}^3$ . Um  $g'(t)$  zu finden, sei  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{x}} & \mathbb{R}^3 \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

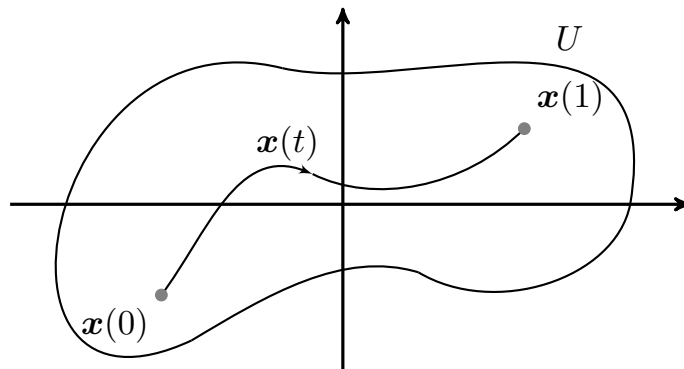
mit  $g = f \circ \mathbf{x}$ . Sei

$$\mathbf{x}(t) = P + tQ = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3),$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Weil  $\mathbf{x}'(t) = (q_1, q_2, q_3) = Q$ , es gilt

$$g'(t) = (f \circ \mathbf{x})'(t) = \langle (\operatorname{grad} f)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \langle (\operatorname{grad} f)(P + tQ), Q \rangle.$$

COROLLAR 2.8.7. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, sodass gilt: für alle  $x_0, x_1 \in U$  es gibt eine differenzierbare Kurve  $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\mathbf{x}(0) = x_0$  and  $\mathbf{x}(1) = x_1$ .



Wenn  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion in  $U$  ist mit

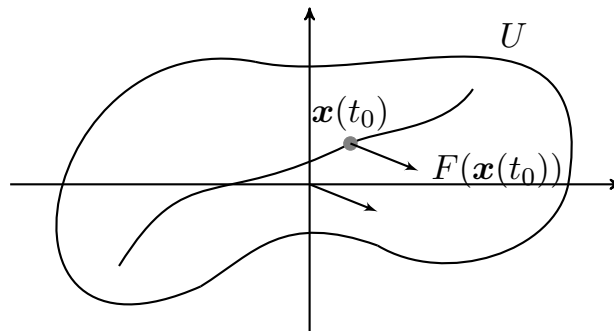
$$(\text{grad}f)(x) = (0, \dots, 0),$$

für alle  $x \in U$ , dann ist  $f$  eine konstante Funktion in  $U$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

## 2.9. Kurvenintegral

Ein Vektorfeld ist eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die jedem Punkt von  $U$  einen Vektor zuordnet. Sei  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$ . *Physikalische Interpretation von  $F(\mathbf{x}(t_0))$* , wobei  $t_0 \in I$ : Der Vektor  $F(\mathbf{x}(t_0))$  ist die Stärke und Richtung einer Kraft im Zeitpunkt  $t_0$  der durch  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  beschriebenen Bewegung.



DEFINITION 2.9.1. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Ein *Vektorfeld* auf  $U$  ist eine Funktion

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

jedem Punkt  $x \in U$  wird also ein Vektor  $F(x) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet. Seien  $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  die Komponenten-Funktionen von  $F$ , d.h.

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

für jedes  $x \in U$ .  $F$  ist (*partiell*) *differenzierbar* in  $U$ , falls alle Komponenten  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  (*partiell*) differenzierbar in  $U$  sind.

BEISPIEL 2.9.2. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion. Die Funktion

$$\text{grad}f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (\text{grad}f)(x); \quad x \in U,$$

ist ein Vektorfeld.

DEFINITION 2.9.3. Seien  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $U$  und  $\mathbf{x}: I \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$ . Sei die Funktion  $F \circ \mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\mathbf{x}} & U \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \searrow F \circ \mathbf{x} & \downarrow F \\ & & \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Wir definieren die Funktion  $C_{F,\mathbf{x}}: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$C_{F,\mathbf{x}}(t) = \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle,$$

für jedes  $t \in I$ .

BEISPIEL 2.9.4. Sei  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$F(x, y) = (e^{xy}, y^2),$$

für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , und sei  $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\mathbf{x}(t) = (t, \sin t),$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Es gelten

$$\mathbf{x}'(t) = (1, \cos t),$$

$$F(\mathbf{x}(t)) = (e^{t \sin t}, \sin^2 t),$$

und

$$C_{F,\mathbf{x}}(t) = \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = e^{t \sin t} + (\sin^2 t)(\cos t),$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ .

DEFINITION 2.9.5. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow U$  differenzierbare Kurve mit einer differenzierbaren Ableitungskurve  $\mathbf{x}'$ , und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld. Das *Kurvenintegral* von  $F$  über  $\mathbf{x}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} F &= \int_a^b C_{F, \mathbf{x}}(t) dt \\ &= \int_a^b \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Weil das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion ist, ist die Funktion  $C_{F, \mathbf{x}}(t)$  Riemannsch integrierbar. Das Kurvenintegral von  $F$  über  $\mathbf{x}$  ist eine Verallgemeinerung der Gleichung

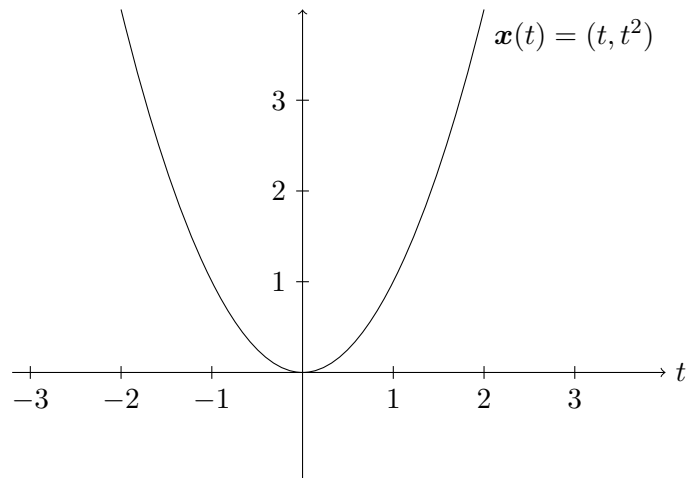
$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du = \int_a^b f(u(t)) \frac{du}{dt} dt.$$

(I) Wir schreiben den Geradenabschnitt zwischen  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  als die Kurve  $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei

$$\mathbf{x}(t) = P + t(Q - P),$$

für jedes  $t \in [0, 1]$ . Es gilt:  $\mathbf{x}(0) = P$  und  $\mathbf{x}(1) = Q$ .

(II) Wir schreiben das Segment der Parabel  $y = t^2$

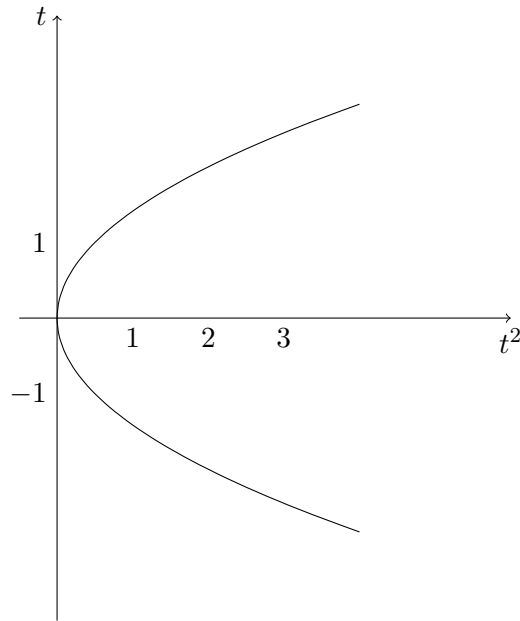


als die Kurve  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

$$\mathbf{x}(t) = (t, t^2),$$

für jedes  $t$  im Intervall  $I$ .

(III) Wir schreiben das Segment der Parabola  $x = t^2$

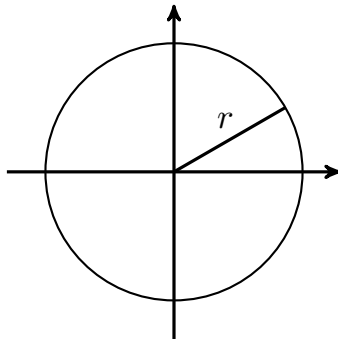


als die Kurve  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, t),$$

für jedes  $t$  im Intervall  $I$ .

(IV) Wir schreiben das Segment der Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  und Radius  $r > 0$



als die Kurve  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

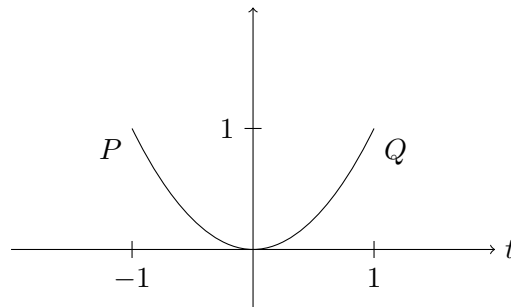
$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t),$$

für jedes  $t$  im Intervall  $I$ .

BEISPIEL 2.9.6. Sei das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

$$F(x, y) = (x^2, xy),$$

für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wir berechnen das Kurvenintegral von  $F$  über das Segment der Parabel  $y = t^2$



zwischen  $P = (-1, 1)$  und  $Q = (1, 1)$ . Weil  $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$ , für alle  $t \in [-1, 1]$ , gelten

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 2t),$$

$$F(\mathbf{x}(t)) = F(t, t^2) = (t^2, t^3),$$

und

$$C_{F, \mathbf{x}}(t) = \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = t^2 + 2t^4.$$

Weil  $-1 \leq t \leq 1$ , gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} F &= \int_{-1}^1 (t^2 + 2t^4) dt \\ &= \int_{-1}^1 t^2 dt + \int_{-1}^1 2t^4 dt \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.9.7. Sei das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

$$F(x, y) = (x^2 y, y^3),$$



für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wir berechnen das Kurvenintegral von  $F$  über den Geradenabschnitt zwischen  $P = (0, 0)$  und  $Q = (1, 1)$ . Weil

$$\mathbf{x}(t) = P + t(Q - P) = (0, 0) + t((1, 1) - (0, 0)) = t(1, 1) = (t, t),$$

wobei  $t \in [0, 1]$ , gelten

$$F(\mathbf{x}(t)) = F(t, t) = (t^3, t^3),$$

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 1),$$

$$C_{F, \mathbf{x}}(t) = \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = t^3 + t^3 = 2t^3,$$

und

$$\int_{\mathbf{x}} F = \int_0^1 2t^3 = 2 \int_0^1 t^3 = 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

BEISPIEL 2.9.8. Sei das Vektorfeld  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Wir berechnen das Kurvenintegral von  $F$  über das Segment der Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius 3 zwischen  $P = (3, 0)$  und

$$Q = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Weil

$$\mathbf{x}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t); \quad t \in [0, \frac{\pi}{6}],$$

$$\mathbf{x}(0) = P \quad \& \quad \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{6}\right) = Q,$$

$$\mathbf{x}'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{6}],$$

gelten

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}(t)) &= F(3 \cos t, 3 \sin t) \\ &= \left( \frac{-3 \sin t}{(3 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2}, \frac{3 \cos t}{(3 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2} \right) \\ &= \left( \frac{-3 \sin t}{9}, \frac{3 \cos t}{9} \right) \\ &= \frac{1}{3}(-\sin t, \cos t), \end{aligned}$$

und

$$C_{F, \mathbf{x}}(t) = \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Also gilt:

$$\int_{\mathbf{x}} F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}.$$

## 2.10. Gradientenfelder

DEFINITION 2.10.1. Ein Vektorfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Gradientenfeld*, wenn eine differenzierbare Funktion  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$F = -\text{grad}V.$$

Dabei nennt man  $V$  das zu  $F$  gehörige Skalarpotential oder einfach kurz ein *Potential* des Gradientenfelds.

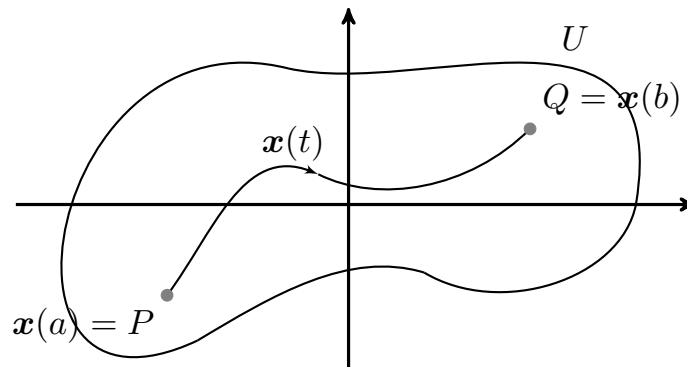
Ist  $V$  ein Potential des Gradientenfelds  $F$ , dann ist  $V + c$  ein Potential des Gradientenfelds  $F$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  (warum?).

Ein Vektorfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist Gradientenfeld genau dann, wenn eine differenzierbare Funktion  $W: U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$F = \text{grad}W.$$

Wenn  $F = -\text{grad}V$ , wobei  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion ist, dann ist  $W = -V$  auch differenzierbar und  $F = \text{grad}(-V) = \text{grad}W$ . Wenn  $F = \text{grad}W$ , wobei  $W: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion ist, dann ist  $V = -W$  auch differenzierbar und  $F = -\text{grad}(-W) = -\text{grad}V$ .

THEOREM 2.10.2. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $U$ .



(I) Sei  $F = \text{grad}W$ , wobei  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion ist.

(a) Wenn  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist mit  $\mathbf{x}(a) = P$  und  $\mathbf{x}(b) = Q$ , dann gilt

$$\int_{\mathbf{x}} F = W(Q) - W(P).$$

(b) Wenn  $\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist mit  $\mathbf{y}(a) = P$  und  $\mathbf{y}(b) = Q$ , dann gilt

$$\int_{\mathbf{y}} F = \int_{\mathbf{x}} F.$$

(c) Wenn  $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist mit  $\mathbf{z}(a) = P = \mathbf{z}(b)$ , dann gilt

$$\int_{\mathbf{z}} F = 0.$$

(II) Sei  $F = -\text{grad}V$ , wobei  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion ist.

(a) Wenn  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist mit  $\mathbf{x}(a) = P$  und  $\mathbf{x}(b) = Q$ , dann gilt

$$\int_{\mathbf{x}} F = V(P) - V(Q).$$

(b) Wenn  $\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist mit  $\mathbf{y}(a) = P$  und  $\mathbf{y}(b) = Q$ , dann gilt

$$\int_{\mathbf{y}} F = \int_{\mathbf{x}} F.$$

(c) Wenn  $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist mit  $\mathbf{z}(a) = Q = \mathbf{z}(b)$ , dann gilt

$$\int_{\mathbf{z}} F = 0.$$

BEWEIS. (I)(i) Nach der Kettenregel für die Funktion  $W \circ \mathbf{x}$  gilt

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\mathbf{x}} & U \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \searrow W \circ \mathbf{x} & \downarrow W \\ & & \mathbb{R}, \end{array}$$

we have that

$$\int_{\mathbf{x}} F = \int_a^b \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \langle (\text{grad}W)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b (W \circ \mathbf{x})'(t) dt \\
&= [W \circ \mathbf{x}]_a^b \\
&= W(\mathbf{x}(b)) - W(\mathbf{x}(a)) \\
&= W(Q) - W(P).
\end{aligned}$$

(ii) Aus (a) folgt

$$\int_{\mathbf{x}} F = W(Q) - W(P) = \int_{\mathbf{y}} F.$$

(iii) Sei  $P = z(a) = z(b)$ . Aus (a) folgt

$$\int_z F = W(P) - W(P) = 0.$$

(II) ist Aufgabe. □

Wenn  $F$  ein Gradientenfeld auf  $U$  ist mit  $W$  eine Potential von  $F$ , dann hängt das Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{x}} F$$

von  $F$  über eine Kurve  $\mathbf{x}$  zwischen  $P$  und  $Q$  in  $U$  von  $\mathbf{x}$  nicht ab, und wir schreiben

$$\int_P^Q F = \int_{\mathbf{x}} F = W(Q) - W(P),$$

wobei  $\mathbf{x}$  eine beliebige differenzierbare Kurve in  $U$  zwischen  $P$  und  $Q$  ist.

BEISPIEL 2.10.3. Sei  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld definiert durch

$$F(x, y, z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3),$$

für jedes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Sei  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$V(x, y, z) = x^2y^3z,$$

für jedes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Es gilt

$$F = \text{grad}V.$$

Seien  $P = (1, -1, 2)$  und  $Q = (-3, 2, 5)$ . Es gilt

$$\int_P^Q F = V(Q) - V(P) = V(-3, 2, 5) - V(1, -1, 2) = 360 - (-2) = 362.$$

BEISPIEL 2.10.4. Sei  $k \in \mathbb{R}$  und sei  $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$G(x, y, z) = \frac{k(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3},$$

für jedes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Sei  $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$V(x, y, z) = -\frac{k}{|(x, y, z)|},$$

für jedes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Es gilt (Aufgabe)

$$\text{grad}V = G,$$

d.h.

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \right) = \frac{k}{|(x, y, z)|^3}(x, y, z).$$

Seien  $P = (1, 1, 1)$  und  $Q = (1, 2, -1)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_P^Q G &= V(Q) - V(P) \\ &= -\frac{k}{|Q|} - \left( -\frac{k}{|P|} \right) \\ &= -k \left( \frac{1}{|Q|} - \frac{1}{|P|} \right) \\ &= -k \left( \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

### 2.11. Integrale, die von einem Parameter abhängen

LEMMA 2.11.1. Seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , wobei  $m > 0$ . Die Funktion

$$\begin{aligned} f &: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sei stetig. Sei  $(u_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente Folge in  $U$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in U \Leftrightarrow |u_n - u| \xrightarrow{n} 0 \text{ \& } u \in U.$$

Seien die Funktionen

$$\begin{aligned} F_n &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \\ F_n(x) &= f(x, u_n) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

für jedes  $x \in [a, b]$  und jedes  $n \in \mathbb{N}^+$ . Sei die Funktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F(x) = f(x, u) \in \mathbb{R},$$

für jedes  $x \in [a, b]$ . Dann konvergieren die Funktionen  $F_n$  für  $n \rightarrow \infty$  auf  $[a, b]$  gleichmässig gegen die Funktion  $F$  d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) > 0 \forall n \geq N(\epsilon) \forall x \in [a, b] \left( |F_n(x) - F(x)| < \epsilon \right).$$

BEWEIS. Siehe [1], p. 114. □

THEOREM 2.11.2. Seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , wobei  $m > 0$ . Die Funktion

$$f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R},$$

sei stetig. Sei die Funktion

$$\phi: U \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi(u) = \int_a^b f(x, u) dx,$$

für jedes  $u \in U$ . Dann ist die Funktion  $\phi$  stetig.

BEWEIS. Weil  $f$  stetig ist, dann ist die Funktion  $[a, b] \ni x \mapsto f(x, u) \in \mathbb{R}$ , wobei  $u \in U$ , auch stetig, und Riemann-integrierbar. Also, ist  $\phi$  wohldefiniert. Seien  $u \in U$  und  $(u_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $U$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

Seien die Funktionen

$$F_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F_n(x) = f(x, u_n) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

und

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F(x) = f(x, u) \in \mathbb{R}.$$

Es gelten:

$$\phi(u_n) = \int_a^b f(x, u_n) dx = \int_a^b F_n(x) dx$$

und

$$\phi(u) = \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b F(x) dx.$$

Nach Lemma 2.11.1 die Funktionen  $F_n$  konvergieren gleichmässig gegen die Funktion  $F$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} |\phi(u_n) - \phi(u)| &= \left| \int_a^b F_n(x) dx - \int_a^b F(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b [F_n(x) - F(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |F_n(x) - F(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \epsilon dx \\ &= \epsilon \int_a^b dx \\ &= \epsilon(b-a), \end{aligned}$$

für alle  $n \geq N(\epsilon)$ . Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) = \phi(u). \quad \square$$

LEMMA 2.11.3. Seien  $a < b$  und  $c < d$  in  $\mathbb{R}$  und sei

$$\begin{aligned} f: [a, b] \times [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

eine stetige Funktion, die nach der zweiten Variablen  $y$  stetig partiell differenzierbar ist. Weiter seien  $y \in [c, d]$  und  $(y_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $[c, d]$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \& \quad \forall_{n \in \mathbb{N}^+} (y_n \neq y).$$

Seien die Funktionen

$$\begin{aligned} F_n: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ F_n(x) &= \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}, \end{aligned}$$

für jedes  $x \in [a, b]$  und jedes  $n \in \mathbb{N}^+$ . Sei die Funktion

$$\begin{aligned} F: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ F(x) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \end{aligned}$$

für jedes  $x \in [a, b]$ . Dann konvergieren die Funktionen  $F_n$  für  $n \rightarrow \infty$  auf  $[a, b]$  gleichmässig gegen die Funktion  $F$ .

BEWEIS. Siehe [1], p. 116. □

Man darf “unter dem Integral differenzieren”.

THEOREM 2.11.4. Seien  $a < b$  und  $c < d$  in  $\mathbb{R}$  und sei

$$\begin{aligned} f: [a, b] \times [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned}$$

eine stetige Funktion, die nach der zweiten Variablen  $y$  stetig partiell differenzierbar ist. Sei die Funktion

$$\begin{aligned} \phi: [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \phi(y) &= \int_a^b f(x, y) dx, \end{aligned}$$

für jedes  $y \in [c, d]$ . Dann ist die Funktion  $\phi$  stetig differenzierbar und es gilt

$$\phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

BEWEIS. Seien  $y \in [c, d]$  und  $(y_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $[c, d]$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u \quad \& \quad \forall_{n \in \mathbb{N}^+} (y_n \neq y).$$

Seien die Funktionen

$$\begin{aligned} F_n: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ F_n(x) &= \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}, \end{aligned}$$

für jedes  $x \in [a, b]$  und jedes  $n \in \mathbb{N}^+$ . Sei die Funktion

$$\begin{aligned} F: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ F(x) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \end{aligned}$$

für jedes  $x \in [a, b]$ . Nach Lemma 2.11.3 die Funktionen  $F_n$  konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  auf  $[a, b]$  gleichmässig gegen die Funktion  $F$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(y_n) - \phi(y)}{y_n - y} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f(x, y_n) dx - \int_a^b f(x, y) dx}{y_n - y} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b [f(x, y_n) - f(x, y)] dx}{y_n - y} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y} \right] dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y} \right] dx \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.
\end{aligned}$$

Die Funktion  $\phi'$  ist nach Theorem 2.11.2 stetig, da nach Voraussetzung die Funktion  $\frac{\partial f}{\partial y}$  auf  $[a, b] \times [c, d]$  stetig ist.  $\square$

BEISPIEL 2.11.5. Sei das Integral

$$I = \int_0^a x^2 \cos(x) dx.$$

Sei die Funktion

$$\begin{aligned}
F: \left[ \frac{1}{2}, 2 \right] &\rightarrow \mathbb{R}, \\
F(y) &= \int_0^a \cos(xy) dx.
\end{aligned}$$

Sei die Funktion

$$\begin{aligned}
f: [0, a] \times \left[ \frac{1}{2}, 2 \right] &\rightarrow \mathbb{R}, \\
f(x, y) &= \cos(xy).
\end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig und nach der zweiten Variablen  $y$  stetig partiell differenzierbar. Nach Theorem 2.11.4 gilt

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx = \int_0^a -x \sin(xy) dx$$

und

$$F''(y) = - \int_0^a x^2 \cos(xy) dx.$$

D.h.

$$I = -F''(1).$$

Aber

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_0^a \cos(xy) dx = \frac{\sin(xy)}{y} \Big|_0^a = \frac{\sin(ay)}{y}, \\
F'(y) &= -\frac{\sin(ay)}{y^2} + \frac{a \cos(ay)}{y},
\end{aligned}$$

und

$$F''(y) = \frac{2 \sin(ay)}{y^3} - \frac{2 \cos(ay)}{y^2} - \frac{a^2 \sin(ay)}{y}.$$

Also gilt

$$I = -F''(1) = (a^2 - a) \sin(a) + 2a \cos(a).$$

## 2.12. Doppelintegrale

DEFINITION 2.12.1. Ein *Rechteck*  $\mathcal{R}$  in  $\mathbb{R}^2$  ist eine Menge

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \& \ c \leq y \leq d\},$$

und eine *offen* is a set of the form

$$\mathcal{R}^o = (a, b) \times (c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \ \& \ c < y < d\},$$

Sei  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Das *Doppelintegral* von  $f$  auf  $\mathcal{R}$  ist definiert durch

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Nach Theorem 2.11.2 ist die Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

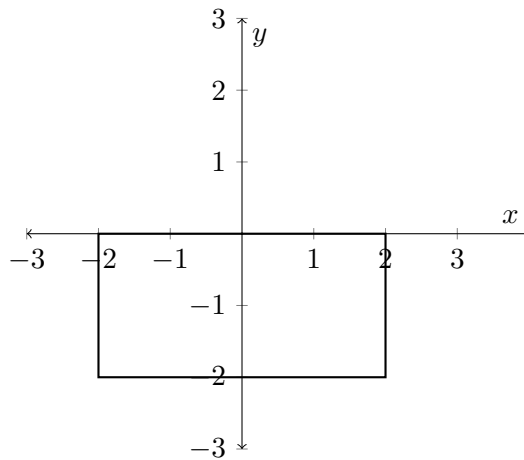
stetig auf  $[a, b]$ , kann also wieder integriert werden. Man schreibt

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$$

als Doppelintegral.

BEISPIEL 2.12.2. Das Rechteck  $[-2, 2] \times [0, -2]$  ist die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \ \& \ -2 \leq y \leq 0\}.$$



BEISPIEL 2.12.3. Sei  $\mathcal{R} = [1, 2] \times [-3, 4]$  und sei  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) = x^2 y,$$

für jedes  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f &= \int_1^2 \left( \int_{-3}^4 x^2 y dy \right) dx \\ &= \int_1^2 x^2 \left( \int_{-3}^4 y dy \right) dx \\ &= \int_1^2 x^2 \frac{1}{2} (16 - 9) dx \\ &= \frac{7}{2} \int_1^2 x^2 dx \\ &= \frac{7}{2} \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) \\ &= \frac{49}{6}. \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet das Doppelintegral

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

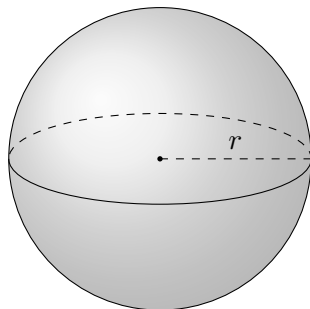
über eine nicht-negative Funktion

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

das Volumen des Körpers unter dem Graphen von  $f$ , d.h. der Menge

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

BEISPIEL 2.12.4. Wir berechnen das Volumen der Kugel vom Radius  $r > 0$  im  $\mathbb{R}^3$ .



Dazu betrachten wir die folgende stetige Funktion

$$f: [-r, r] \times [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} & , x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Körper  $K(r)$  unter dem Graphen von  $f$  ist die obere Hälfte der Kugel:

$$\begin{aligned} K(r) &= \{(x, y, z) \in [-r, r] \times [-r, r] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, z) \in [-r, r] \times [-r, r] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) \in [-r, r] \times [-r, r] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z^2 \leq r^2 - x^2 - y^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in [-r, r] \times [-r, r] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$V = 2 \int_{-r}^r \left( \int_{-r}^r f(x, y) dx \right) dy.$$

Sei  $y \in [-r, r]$  und sei

$$\rho = \rho(y) = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-r}^r f(x, y) dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2 - x^2} dx \\
&= \int_{-r}^r \sqrt{\rho(y)^2 - x^2} dx \\
&= \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho(y)^2 - x^2} dx \\
&= \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} dx \\
&\stackrel{(x=\rho \sin t)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos^2 t dt \\
&= \rho^2 \frac{\pi}{2} \\
&= (r^2 - y^2) \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
V &= 2 \int_{-r}^r F(y) dy \\
&= 2 \int_{-r}^r (r^2 - y^2) \frac{\pi}{2} dy \\
&= \dots = \frac{4}{3} \pi r^3.
\end{aligned}$$

**THEOREM 2.12.5.** Sei  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Es gilt

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**BEWEIS.** Seien die Funktionen

$$g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x, y) = \int_c^y f(x, t) dt,$$

und

$$\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi(y) = \int_a^b g(x, y) dx = \int_a^b \left( \int_c^y f(x, t) dt \right) dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\phi(c) &= \int_a^b \left( \int_c^c f(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_a^b 0 dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die Funktion  $g$  ist stetig (warum?). Darüber hinaus gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

d.h. die Funktion  $g$  nach der zweiten Variablen  $y$  stetig partiell differenzierbar ist. Nach Theorem 2.11.4

$$\phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy &= \int_c^d \phi'(y) dy \\ &= \phi(d) - \phi(c) \\ &= \phi(d) \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad \square\end{aligned}$$

### 2.13. Der Satz von Green

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $U$  mit

$$F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)),$$

wobei  $p, q : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Komponenten Funktionen von  $F$  sind. Wenn  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve in  $U$  ist, dann gilt

$$\int_{\mathbf{x}} F = \int_a^b \langle F(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left( p(x, y) \frac{dx}{dt} + q(x, y) \frac{dy}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b p(x, y) dx + q(x, y) dy.
\end{aligned}$$

DEFINITION 2.13.1. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Ein *Pfad* in  $U$  ist eine endliche Folge

$$p = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m),$$

wobei  $m \geq 1$ , und  $\mathbf{x}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow U, \dots, \mathbf{x}_m : [a_m, b_m] \rightarrow U$  Kurven in  $U$  sind mit

$$\mathbf{x}_1(b_1) = \mathbf{x}_2(a_2) \ \& \ \dots \ \& \ \mathbf{x}_m(a_m) = \mathbf{x}_{m-1}(b_{m-1}).$$

Ein Pfad  $p$  in  $U$  heißt *differenzierbar* in  $U$ , wenn  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  differenzierbaren Kurven in  $U$  sind. Der Pfad  $p$  ist *geschlossen*, falls

$$\mathbf{x}_1(a_1) = \mathbf{x}_m(b_m).$$

Seien  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar Vektorfeld auf  $U$  und  $p$  differenzierbar Pfad in  $U$ . Das *Pfadintegral* von  $F$  über  $p$  ist definiert durch

$$\int_p F = \int_{\mathbf{x}_1} F + \dots + \int_{\mathbf{x}_m} F.$$

Offensichtlich eine Kurve ist ein Pfad.

Um das Pfadintegral

$$\int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)} F$$

eines differenzierbaren Vektorfelds  $F = (p, q)$  auf ein offen Rechteck zu bestimmen, wobei

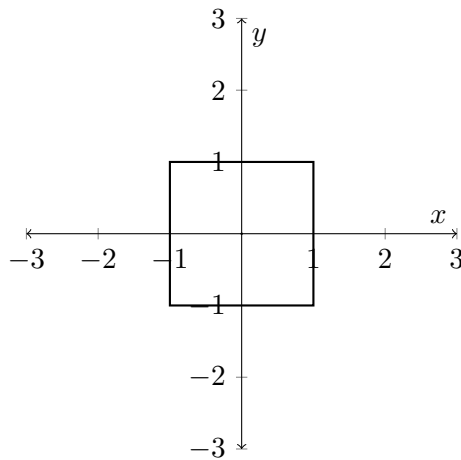
$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$$

eine Parametrisierung von  $\mathcal{R}$  gegen den Uhrzeigersinn ist, genügt das Doppelintegral

$$\iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

zu berechnen.

BEISPIEL 2.13.2. Eine Parametrisierung von  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  gegen den Uhrzeigersinn ist



die Folge der Geradeabschnitte

$$((-1, -1) \rightarrow (1, -1), (1, -1) \rightarrow (1, 1), (1, 1) \rightarrow (-1, 1), (-1, 1) \rightarrow (-1, -1)).$$

Es gilt:

**THEOREM 2.13.3** (Der Satz von Green). Sei  $F : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $(a, b) \times (c, d)$  mit

$$F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)),$$

für jedes  $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ . Dann gilt:

$$\int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)} p(x, y)dx + q(x, y)dy = \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right),$$

wobei  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{R}$  gegen den Uhrzeigersinn ist.

**BEISPIEL 2.13.4.** Sei das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$F(x, y) = (3xy, x^2),$$

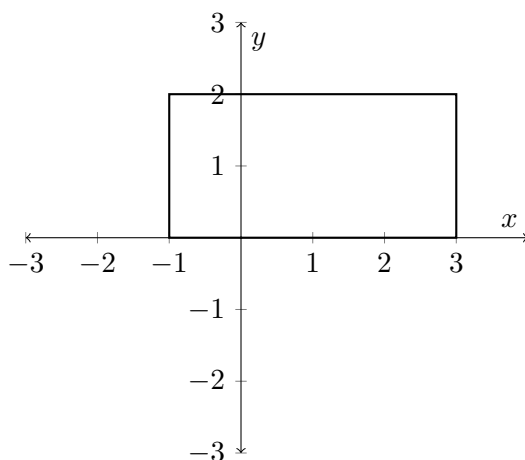
für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Also gilt:

$$p(x, y) = 3xy, \quad q(x, y) = x^2,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x \quad \& \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 3x.$$

Das Pfadintegral von  $F$  über das Rechteck  $[-1, 3] \times [0, 2]$





ist kalkuliert mithilfe des Satzes von Green wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)} p(x, y)dx + q(x, y)dy &= \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\
 &= \int_{-1}^3 \left( \int_0^2 (2x - 3x)dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^3 \left( \int_0^2 (-x)dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (-x) \left( \int_0^2 dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (-x)2dx \\
 &= -2 \int_{-1}^3 xdx \\
 &= -8.
 \end{aligned}$$

### 2.14. Totale Differenzierbarkeit

Wir definieren die totale Differenzierbarkeit von Abbildungen einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$  als gewisse Approximierbarkeit durch lineare Abbildungen (siehe auch Definition 2.8.2).

DEFINITION 2.14.1. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die Abbildung  $f$  heißt *(total) differenzierbar* im Punkt  $x_0 \in U$  falls es eine lineare Abbildung

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt, sodass in einer Umgebung  $V_{x_0}$  von  $x_0$  gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + \phi(h),$$

wobei  $h \in V_{(0, \dots, 0)} \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $(0, \dots, 0)$  ist, und  $\phi: V_{(0, \dots, 0)} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung ist mit

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0.$$

Für  $m = 1$  liefert dies die Definition der Differenzierbarkeit von Abbildungen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Definition 2.8.2 die Funktion  $f$  ist differenzierbar im Punkt  $x_0 \in U$ , falls

(a) Der Gradient von  $f$  im Punkt  $x_0$

$$\text{grad}f(x_0) = (D_1f(x_0), \dots, D_nf(x_0)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

existiert, und

(b) es gibt eine Funktion  $g: \mathcal{B}((0, \dots, 0), \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} g(h) = 0,$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n + |h|g(h) \\ &= \langle (\text{grad}f)(x_0), h \rangle + |h|g(h). \end{aligned}$$

Die Funktion  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$T(x) = \langle (\text{grad}f)(x_0), x \rangle,$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ , ist eine lineare Abbildung. Darüber hinaus die Funktion  $\phi: \mathcal{B}((0, \dots, 0), \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\phi(h) = |h|g(h); \quad h \in \mathcal{B}((0, \dots, 0), \varepsilon),$$

erfüllt die Eigenschaft

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\phi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|h|g(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} g(h) = 0.$$

Nach Theorem 1.8.5 wenn  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung ist, dann gibt es eine Matrix  $A_T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , sodass gilt

$$T(x) = A_T x,$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $A_T$  die Matrix der linearen Abbildung  $T$  ist. Sei  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es gibt  $T(e_i)_1, \dots, T(e_i)_m \in \mathbb{R}$ , die Koeffizienten bezüglich der kanonischen Basis  $E_m$  von  $\mathbb{R}^m$ , sodass gilt

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^m T(e_i)_j e_j = (T(e_i)_1, \dots, T(e_i)_m).$$

Diese Vektoren in  $\mathbb{R}^m$  sind die Spalten von  $A_T$ , d.h.

$$A_T = \begin{bmatrix} T(e_1)_1 & \dots & T(e_n)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(e_1)_j & \dots & T(e_n)_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(e_1)_m & \dots & T(e_n)_m \end{bmatrix} = [a_{ji}] = [T(e_i)_j].$$

Also gilt

$$\begin{bmatrix} T(x)_1 \\ \vdots \\ T(x)_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

und für  $1 \leq j \leq m$  und  $1 \leq i \leq n$  gilt

$$T(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \right).$$

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  total differenzierbar im Punkt  $x_0 \in U$  mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + \phi(h),$$

für jedes  $h \in V_{(0, \dots, 0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Seien

$$f = (f_1, \dots, f_m) \quad \& \quad \phi = (\phi_1, \dots, \phi_m).$$

Sei  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) &= [T(h)]_j + \phi_j(h) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ji} h_i + \phi_j(h). \end{aligned}$$

Daran sieht man, dass  $f$  genau dann im Punkt  $x_0 \in U$  differenzierbar ist, wenn alle  $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar sind.

BEISPIEL 2.14.2. Sei  $S = (s_{ji}) \in M_n(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix und sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, Sx \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (Sx)_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n s_{ji} x_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n s_{ji} x_j x_i. \end{aligned}$$

Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Weil  $s_{ji} = s_{ij}$ , es gilt

$$\begin{aligned} \langle x, Sy \rangle &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n s_{ji} x_j y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} x_i y_j \\ &= \langle y, Sx \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \langle x_0 + h, S(x_0 + h) \rangle \\ &= \langle x_0 + h, Sx_0 + Sh \rangle \\ &= \langle x_0, Sx_0 \rangle + \langle x_0, Sh \rangle + \langle h, Sx_0 \rangle + \langle h, Sh \rangle \\ &= \langle x_0, Sx_0 \rangle + 2\langle Sx_0, h \rangle + \langle h, Sh \rangle \\ &= \langle x_0, Sx_0 \rangle + \langle 2Sx_0, h \rangle + \langle h, Sh \rangle \\ &= f(x_0) + \langle a, h \rangle + \phi(h), \\ &= f(x_0) + T(h) + \phi(h), \end{aligned}$$

wobei

$$a = 2Sx_0 \quad \& \quad \phi(h) = \langle h, Sh \rangle \quad \& \quad T(x) = \langle a, x \rangle.$$

Nach der Cauchy-Ungleichung und nach dem Satz 2.4.1 es gibt  $C \geq 0$ , sodass gilt:

$$|\phi(h)| = |\langle h, Sh \rangle| \leq |h| |Sh| \leq |h| C |h| = C|h|^2,$$

also gilt:

$$0 \leq \frac{|\phi(h)|}{|h|} \leq \frac{C|h|^2}{|h|} = C|h| \xrightarrow{h \rightarrow \mathbf{0}} 0.$$

Dies zeigt, dass  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist.

**SATZ 2.14.3.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar im Punkt  $x_0 \in U$ . Seien  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineare Abbildung und  $\phi: V_{(0, \dots, 0)} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0,$$

sodass gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + \phi(h),$$

für jedes  $h \in V_{(0, \dots, 0)}$ . Sei  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  die Matrix von  $T$ . Dann gilt:

(i)  $f$  ist im Punkt  $x_0$  stetig.

(ii) Alle Komponenten  $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$ , wobei  $j \in \{1, \dots, m\}$ , sind in  $x_0$  partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) = a_{ji},$$

für jedes  $j \in \{1, \dots, m\}$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**BEWEIS.** (i) Nach dem Satz 2.4.1  $T$  ist eine stetige Funktion, also gilt

$$h_n \xrightarrow{n} (0, \dots, 0) \Rightarrow T(h_n) \xrightarrow{n} T(0, \dots, 0) = 0,$$

also gilt

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} T(h) = 0.$$

Weil

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0,$$

es gilt

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \phi(h) = \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \left[ \frac{\phi(h)}{|h|} \right] |h| = 0.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} f(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} [f(x_0) + T(h) + \phi(h)] \\ &= f(x_0) + \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} T(h) + \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \phi(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_0) + 0 + 0 \\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

(ii) Weil

$$\begin{aligned}
f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) &= [T(h)]_j + \phi_j(h) \\
&= \sum_{i=1}^n a_{ji} h_i + \phi_j(h),
\end{aligned}$$

es gilt

$$\begin{aligned}
f_j(x_0 + h'e_i) - f_j(x_0) &= \langle (a_{j1}, \dots, a_{jn}), h'e_i \rangle + \phi_j(h'e_i) \\
&= h' \langle (a_{j1}, \dots, a_{jn}), e_i \rangle + \phi_j(h'e_i) \\
&= h' a_{ji} + \phi_j(h'e_i),
\end{aligned}$$

wobei  $h' \in \mathbb{R}$ . Also gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_j}{\partial x_i} &= \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{f_j(x_0 + h'e_i) - f_j(x_0)}{h'} \\
&= \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{h' a_{ji} + \phi_j(h'e_i)}{h'} \\
&= a_{ji} + \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\phi_j(h'e_i)}{h'} \\
&= a_{ji} + 0 \\
&= a_{ji}.
\end{aligned}$$

□

Aus Satz 2.14.3(ii) folgt, dass die Matrix  $A$  durch die differenzierbare Abbildung  $f$  eindeutig bestimmt ist. Man nennt  $A$  das *Differential* von  $f$  im Punkte  $x_0$ , Schreibweisen:

$$(Df)(x_0) = \left[ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right]_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n},$$

oder

$$(Df)(x_0) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

**SATZ 2.14.4.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Mengen sowie  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen mit  $f(U) \subseteq V$ . Die Abbildung  $f$  sei im Punkt  $x_0 \in U$  differenzierbar und die Abbildung  $g$  im Punkt  $y_0 = f(x_0) \in V$  differenzierbar. Dann ist die Komposition  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \subseteq V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k \\ & \searrow & \nearrow \\ & & g \circ f \end{array}$$

im Punkt  $x_0$  differenzierbar und für ihr Differential gilt

$$D(g \circ f)(x_0) = [D(g)(f(x_0))] \cdot D(f)(x_0).$$

BEWEIS. Aufgabe.

□

## Literaturverzeichnis

- [1] O. Forster: *Analysis 2*, Vieweg + Teubner, 2007.
- [2] W. Greub: *Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1975.
- [3] S. Lang: *Undergraduate Analysis*, Springer, 1983.
- [4] S. Lang: *Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1987.
- [5] S. Lang: *Calculus of Several Variables*, Springer, 1987.
- [6] J. E. Marsden, A. Tromba: *Vector Calculus*, W. H. Freeman and Company Publishers, 2012.