Zusatzinformation zur Erstellung eines statistischen Tests mit numerischen Mitteln

Aufgabe 2 in Tutorienblatt 14 hat uns mit dem Verwerfungsbereich:

$$\left\{(\alpha_i)_{i\in\{1,\dots n\}} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[^n \middle| \Phi((\alpha_i)_{i\in\{1,\dots n\}}) > \tilde{T}\right\} \subseteq \tilde{V} \subseteq \left\{(\alpha_i)_{i\in\{1,\dots n\}} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[^n \middle| \Phi((\alpha_i)_{i\in\{1,\dots n\}}) \geq \tilde{T}\right\} \quad (1)$$

$$\Phi((\alpha_i)_{i\in\{1,\dots n\}}) = \sum_{i=1}^{n} \log|\sin(\alpha_i)| \quad (2)$$

mit der Nebenbedingung:

$$\int_{\tilde{V}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\alpha_i \frac{2}{\pi} = \alpha \quad (3)$$

Weil die Mengen die sich durch (1) ergeben keine einfachen Mengen sind, können wir in der Teststatistik nicht einfach $\tilde{T}$ durch einen Ausdruck von α ersetzeten. Somit fällt es uns schwer diesen Test tatsächlich durchzuführen wenn wir Daten einer zufällig gezogenen Sehne bekämen. Was man statt dessen machen kann um den Wert $\tilde{T}$ zumindest ungefähr für ein konkretes α zu bestimmen ist sehr viele Sehnen (N stück) nach der Nullhypothese zu ziehen, die resultierenden empirischen Werte von $\sum_{i=1}^{n} \log|\sin(\alpha_i)|$ der größe nach zu ordnen und dann den $\lfloor \alpha * N \rfloor$ größten zu nehmen. Auf diese Weise ist gewährleistet, dass der resultierende Test zumindest auf den gezogenen Werten einem Test nach dem Neyman-Pearson Lemma entspricht. Für große N nährt sich der so gefundene Wert von $\tilde{T}$ dem richtigen Wert an.

In die erste Graphik sind Punkte eingetragen, deren x-Koordinate dem Winkel zwischen zwei Punkten entspricht die zufällig nach der Nullhypothese gezogen wurden und deren y-Koordinate dem Winkel zwischen zwei Punkten entspricht die zufällig nach der alternativen Hypothese gezogen wurden. Man kann hier schon erkennen, dass die Alternative zu großen Winkeln neigt.

In der zweiten Graphik entsprechen die x- beziehungsweise y-Koordinate den Werten von $|\Phi|$ von 100 Sehnen die nach der Nullhypothese beziehungsweise der alternativen Hypothese gezogen wurden. Man beachte hierbei die Skalierung der Achsen, die Werte der Nullhypothese variiert zwischen Werten von 40 bis 100, während die Werte der alternativen Hypothese zwischen 20 und 45 variieren. Das rechtfertigt die Hohe Macht der Tests. Dieser Test lieferte für $n = 100, N = 10^5, \alpha = \frac{1}{100}$ eine Macht von $0,99994$. Für die genaue umsetzung siehe den Quellcode.

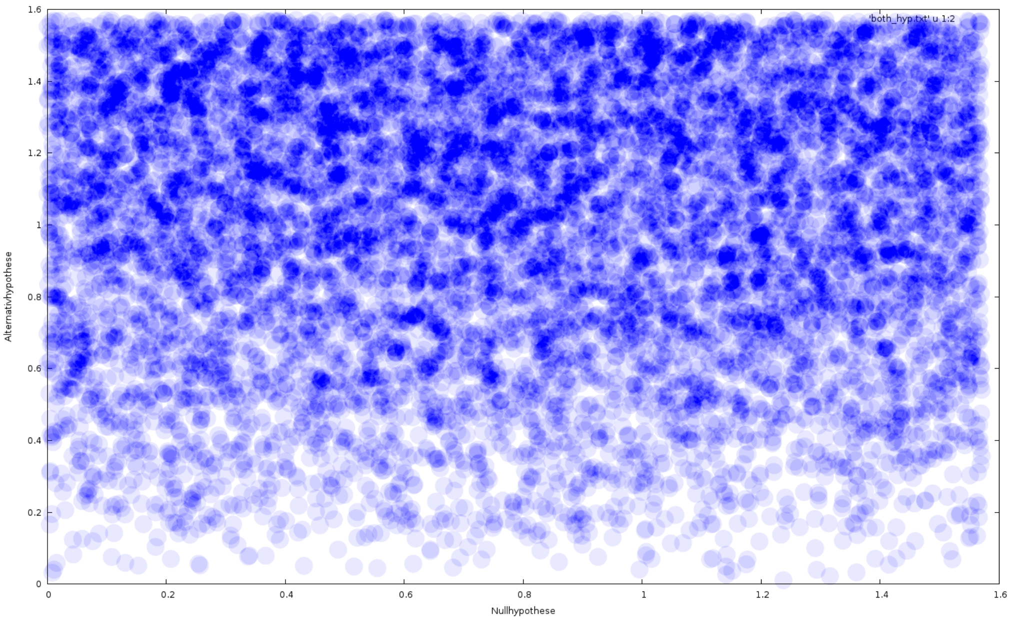

Abbildung 1: zufällig gezogene Winkel zwischen den Punkten

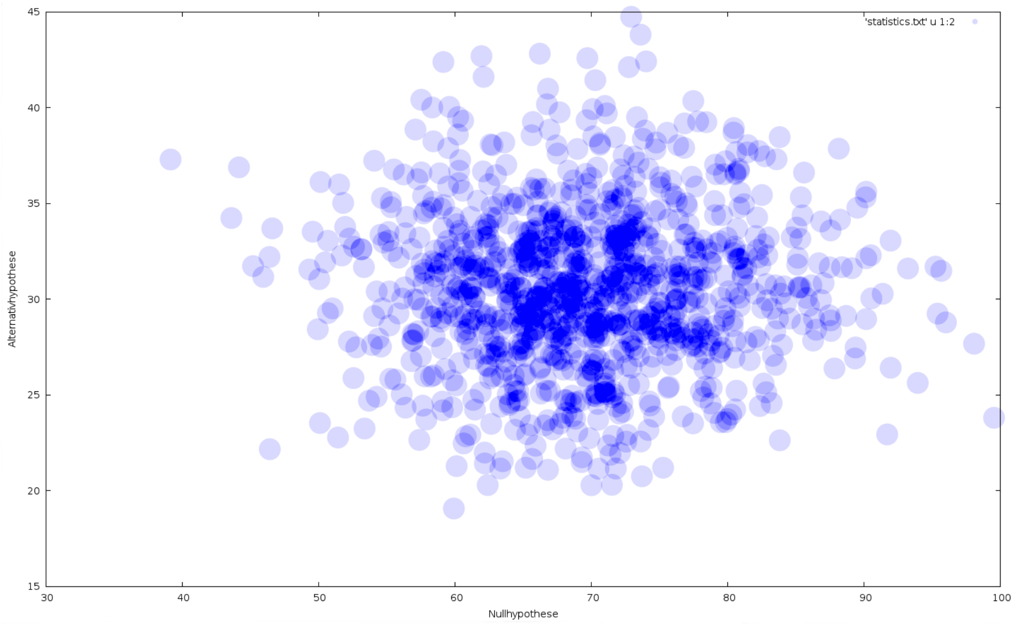

Abbildung 2: empirische Werte von $\Phi((\alpha_i)_{i\in\{1,\ldots n\}})$