Blatt Nr. 5 Prof. F. Merkl

Tutorium zur Stochastik für Lehramt
SS 2016

Aufgabe 1

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Weiter seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Wahrscheinlichkeitsdichten f_P bzw. f_Q bezüglich μ. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) P=Q

b) $f_P = f_Q$ μ-fast sicher, d.h. $\{\omega \in \Omega : f_P(\omega) \neq f_Q(\omega)\}$ ist eine μ-Nullmenge.

Aufgabe 2

Es sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mit der Dichte

$$f = 2c1_{]0,1/2]\times]0,1]} + c1_{]1/2,1]\times]0,1]}$$

bezüglich des 2-dimensionalen Lebesgue-Maßes λ_2 mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

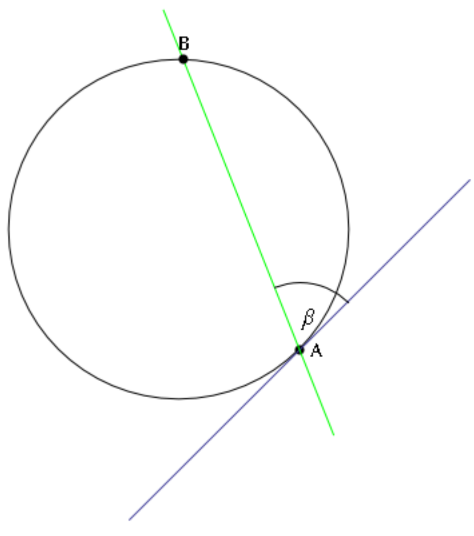
a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Berechnen Sie $P(]0,3/4]\times]0,1/2])$.

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die auftretenden Rechtecke an einer Skizze.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das folgende Modell, in dem zufällig eine Kreissehne des Einheitskreises ausgewählt wird:



Bitte wenden

Ein zufälliges Ergebnis $\omega = (\alpha, \beta) \in \Omega :=]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ wird gemäß der (kontinuierlichen) Gleichverteilung $P = \mathrm{unif}(\Omega)$ auf Ω gezogen. Dann wird der zufällige Punkt $A(\omega)$ auf dem Kreis durch

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Kreissehne schließt dann mit der durch $A(\omega)$ gehenden Tangente den Winkel β ein. $B(\omega)$ ist dann der zweite Schnittpunkt der Sekante mit dem Kreis. (Siehe Skizze)

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\|A - B\|$, also die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} F :& \mathbb{R} \to [0, 1], \\ F(x) :=& P[\|A - B\| \leq x] = P\left(\{\omega \in \Omega | \; \|A(\omega) - B(\omega)\| \leq x\}\right). \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $\|A - B\|$ eine Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ besitzt, und geben Sie eine solche Dichte an. (Gemeint ist natürlich eine Dichte der Verteilung $\mathcal{L}_P(\|A - B\|)$ von $\|A - B\|$ bezüglich des Lebesguemaßes.)