

Tutorium zur Stochastik für Lehramt
SS 2016**Aufgabe 1**

Wir betrachten ein Zufallsexperiment, in dem wir aus r roten und b blauen Kugeln in einer Urne n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ziehen, wobei $n \leq r + b$. Die Kugeln können außer durch ihre Farbe nicht voneinander unterschieden werden. Finden Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω , die Interpretation seiner Elemente und eine geeignete σ -Algebra und geben Sie ein plausibles Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{r,b,n}$ zur Beschreibung dieses Experimentes an.

Aufgabe 2

Es sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Beweisen Sie, dass der folgende Limes existiert und berechnen Sie ihn:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{N}{k}}{N^k} \quad (1)$$

Aufgabe 3

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}: \quad P(A \setminus B) - P(B \setminus A) = P(A) - P(B)$$

Aufgabe 4

Es seien das Einheitsintervall Ergebnisraum $\Omega = [0, 1[$ und die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1[)$ darauf gegeben. Weiter bezeichne $P = \text{unif}([0, 1[)$ die (kontinuierliche) Gleichverteilung darauf. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n -te Dezimalziffer $Z_n(\omega)$ einer Zahl $\omega \in \Omega$ definiert durch:

$$Z_n(\omega) = \lfloor 10^n \omega \rfloor \bmod 10. \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ den ganzzahligen Anteil von $x \in \mathbb{R}$ und $a \bmod 10 = a - 10\lfloor a/10 \rfloor$ den Rest von a bei Division durch 10. Beweisen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $B_n = \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) = 3\}$ ein Ereignis, also ein Element von $\mathcal{B}([0, 1[)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B_n)$.