Blatt Nr. 13 Prof. F. Merkl

Tutorium zur Stochastik für Lehramt
SS 2016

Aufgabe 1

In der angewandten Statistik gibt es die "Daumenregel", dass für viele Arten von Messgrößen ca. 5% der Messergebnisse mehr als zwei Standardabweichungen von dem Erwartungswert abweichen. Geben Sie eine theoretische Begründung für diese Daumenregel.

Aufgabe 2

Ein stochastischer Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $0 \le p \le 1$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_{p,n}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und p auf $\Omega_n := \{0, 1, \ldots, n\}$. Weiter sei die Zufallsvariable $X_n : \Omega_n \to [0,1]$, $X_n(\omega) = \omega/n$ gegeben. Es sei für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(p) = E_{P_{n,p}}[f(X_n)].$$

Beweisen Sie:

a) Jedes f_n ist eine Polynomfunktion mit Grad $\le n$.

b) Für alle $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{p\in[0,1]} P_{n,p}[|X_n - p| \ge \delta] \le \frac{1}{4n\delta^2}$$

c) Bezeichnet

$$s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad s(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in [0,1], \ |x - y| \le \delta\}$$

den Stetigkeitsmodul von f, so gilt für alle $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$:

$$|f_n(p) - f(p)| \le \frac{s(1)}{4n\delta^2} + s(\delta).$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}&f_n(p) - f(p)\\ &= E_{P_{n,p}}[(f(X_n) - f(p))1_{\{|X_n-p|\ge\delta\}}] + E_{P_{n,p}}[(f(X_n) - f(p))1_{\{|X_n-p|<\delta\}}]\end{aligned}$$

d)

$$\sup_{p\in[0,1]} |f_n(p) - f(p)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgabe 3

Ein Grenzwertsatz für die Multinomialverteilung. Es seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ mit $p_k := P[X_i = k] > 0$ für $k = 1, 2, 3$. Wir setzen

$$N_{k,n} := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i = k\}}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, 3$. Weiter seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ und $n = n_1 + n_2 + n_3$ gegebene Zahlen.

a) Berechnen Sie $P[N_{1,n} = n_1, N_{2,n} = n_2, N_{3,n} = n_3]$.

b) Nehmen Sie nun noch an, dass $p_k n = n_k$ für $k = 1, 2, 3$ gilt. Zeigen Sie, dass $mP[N_{1,mn} = mn_1, N_{2,mn} = mn_2, N_{3,mn} = mn_3]$ für $m \to \infty$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingformel.