Blatt Nr. 12 Prof. F. Merkl

Tutorium zur Stochastik für Lehramt
SS 2016

Aufgabe 1

Eine nützliche Formel für die Covarianz. Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Aufgabe 2

Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert nicht fast sichere Konvergenz. Es seien $N_k : \Omega \to A_k$, $k \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, gleichverteilt auf A_k, wobei $A_k := \{n \in \mathbb{N} : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{N_k = n\}}.$$

Zeigen Sie:

a) $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in Wahrscheinlichkeit, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P[|X_n| \geq \epsilon] = 0.$$

b) X_n konvergiert für $n \to \infty$ *nicht* P-fast sicher gegen 0.

Aufgabe 3

Der Poissonprozess.
Wir betrachten folgendes Modell für kumulierte Wartezeiten: Eine (idealisierte) Glühlampe kann eine zufällige, exponentialverteilte Zeit (Parameter $a > 0$) betrieben werden, bevor sie kaputt geht. Zur Zeit $t = 0$ wird eine Glühlampe in Betrieb genommen. Sobald sie kaputt geht, wird eine neue Glühlampe in Betrieb genommen; sobald diese kaputt geht, wieder eine neue, usw. Die Betriebszeiten der Glühlampen seien unabhängig voneinander.

a) Identifizieren Sie die Verteilung des zufälligen Zeitpunkts T_n, zu dem die n-te Glühlampe kaputt geht.

b) Für festes $t > 0$ sei N_t die zufällige Anzahl der Glühlampen, die bis zur Zeit t kaputt gegangen sind. Zeigen Sie: N_t ist poissonverteilt. (Insbesondere ist N_t fast sicher endlich.) Berechnen Sie den Parameter dieser Poissonverteilung.