Tutorium zur Stochastik für Lehramt
SS 2016

Aufgabe 1

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung. Der zufällige Geschwindigkeitsvektor V eines Moleküls der Masse m in einem Gas der absoluten Temperatur T besitzt die Dichte

$$f(v) = \frac{1}{Z} e^{-H(v)/(kT)}, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

bezüglich des dreidimensionalen Lebesguemaßes, wobei $H(v) = m\|v\|_2^2/2$ die kinetische Energie zum Geschwindigkeitsvektor v , Z eine Normierungskonstante und k die sogenannte Boltzmannkonstante bezeichnen. Zeigen Sie: Die zufällige kinetische Energie $H(V)$ eines Moleküls ist gammaverteilt. Bestimmen Sie die Parameter dieser Gammaverteilung. Die Verteilung des zufälligen Geschwindigkeitsbetrags $\|V\|_2$ heißt *Maxwellverteilung*. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der Maxwellverteilung.

Aufgabe 2

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \text{unif}([0, 1[))$ und

$$Z_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, Z_n(\omega) = [2(2^n \omega - [2^n \omega])] \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

die $n + 1$ -te Binär-Nachkommastelle. Zeigen Sie:

Die $Z_n, n \in \mathbb{N}$ sind i.i.d. auf $\{0, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen.

Hinweis: Die Ereignisse $\{Z_0 = z_0, \dots, Z_n = z_n\}$, mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $z_0, \dots, z_n \in \{0, 1\}$, bilden zusammen mit $\emptyset$ ein Erzeugendensystem von $\sigma(Z_k : k \in \mathbb{N}_0)$. Zeigen Sie zuerst, dass dieses Erzeugendensystem durchschnittstabil ist.

Aufgabe 3

- a) Zeigen Sie: es gibt i.i.d auf $\{0, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen $Z_{n,m}, n, m \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis der Aufgabe 2 von eben.

- b) Folgern Sie für solche $Z_{n,m}$:

$X_m := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} Z_{n,m}$ sind i.i.d. uniform verteilte Zufallsvariablen auf $[0, 1]$.

Hinweis: $\sigma(X_m) \subseteq \sigma(Z_{n,m} : n \in \mathbb{N}_0)$ darf ohne Beweis verwendet werden. Das Ergebnis von Aufgabe 2 des 10. Übungsblattes darf ebenfalls verwendet werden.

- c) Folgern Sie: Ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $q :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Quantilfunktion von Q , so ist $(q(X_m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit Verteilung Q .