

Übungen zur Stochastik für Lehramt
SS 2016
Abgabe erfolgt in den Tutorien

Aufgabe 1

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}_+^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^3), P)$, wobei P die folgende Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^3)$ besitze:

$$f(x, y, z) = e^{-x-y-z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3.$$

Weiter sei der folgende Zufallsvektor F gegeben:

$$F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ F(x, y, z) = \left(x + y + z, \frac{y}{x + y + z}, \frac{z}{x + y + z} \right)$$

- a) Finden Sie den Wertebereich des Zufallsvektors F .
- b) Finden Sie eine Dichte von F (also eine Dichte der Verteilung $\mathcal{L}_P(F)$) bezüglich des 3-dimensionalen Lebesguemaßes λ_3 .

Aufgabe 2

Erinnern Sie sich an die Situation aus Übungsblatt 5 Aufgabe 2 und Übungsblatt 5 Aufgabe 3. Die dort besprochenen Modelle werden im Folgenden mit H_2 bzw. H_3 und die damit definierten Zufallsvariablen mit A_2, B_2 bzw. A_3, B_3 bezeichnet. Betrachten Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsräume $(S^1 \times S^1, \mathcal{B}(S^1 \times S^1), \mathcal{L}_{P_{H_2}}(A_2, B_2))$ und $(S^1 \times S^1, \mathcal{B}(S^1 \times S^1), \mathcal{L}_{P_{H_3}}(A_3, B_3))$. Berechnen Sie “die” Dichte

$$\rho := \frac{d\mathcal{L}_{P_{H_2}}(A_2, B_2)}{d\mathcal{L}_{P_{H_3}}(A_3, B_3)} : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

der Verteilung $\mathcal{L}_{P_{H_2}}(A_2, B_2)$ bezüglich der Verteilung $\mathcal{L}_{P_{H_3}}(A_3, B_3)$.

Hinweis: Bezeichnet Q die Gleichverteilung auf $S^1 \times S^1$, so gilt

$$\frac{d\mathcal{L}_{P_{H_2}}(A_2, B_2)}{d\mathcal{L}_{P_{H_3}}(A_3, B_3)} = \frac{d\mathcal{L}_{P_{H_2}}(A_2, B_2)/dQ}{d\mathcal{L}_{P_{H_3}}(A_3, B_3)/dQ} \quad Q\text{-fast sicher.}$$

(Warum?) Berechnen Sie “die” beiden Dichten $d\mathcal{L}_{P_{H_2}}(A_2, B_2)/dQ$ und $d\mathcal{L}_{P_{H_3}}(A_3, B_3)/dQ$ jeweils mit Hilfe einer Koordinatentransformation.

Aufgabe 3

Erinnern Sie sich an die Situation aus Tutorienblatt 6 Aufgabe 2. Nun sendet die Lampe das Photon im dreidimensionalen Raum entsprechend der Gleichverteilung auf der Halbkugel aus. Bestimmen Sie eine Dichte der Verteilung des Ortes, an dem das Photon auf die Wand trifft.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis der Aufgabe 3 auf Übungsblatt 6.