Blatt Nr. 5 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik für Lehramt
SS 2016
Abgabe erfolgt in den Tutorien

Aufgabe 1

Es sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit der Dichte $f(x) = c(1+x)e^{-x}1_{]0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, bezüglich des Lebesgue-Maßes mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

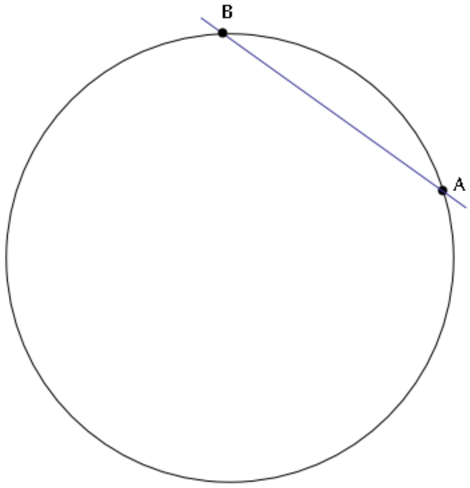
b) Skizzieren Sie die Dichte f.

c) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von P.

d) Berechnen Sie $P(\{2\})$ und $P([1,2])$. Veranschaulichen Sie sich diese Wahrscheinlichkeiten in Ihren Skizzen der Dichte f und der Verteilungsfunktion F.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das folgende Modell, in dem zufällig eine Kreissehne des Einheitskreises ausgewählt wird:



Ein zufälliges Ergebnis $\omega \in \Omega :=]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ wird gemäß der Gleichverteilung $P = \text{unif}(\Omega)$ auf Ω gezogen. Die beiden Punkte $A(\omega)$ und $B(\omega)$ auf dem Kreis werden durch

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 \\ \sin\omega_1 \end{pmatrix}, \qquad B(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 \\ \sin\omega_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. (Siehe Skizze)

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F von $\|A-B\|$ bezüglich P, definiert durch

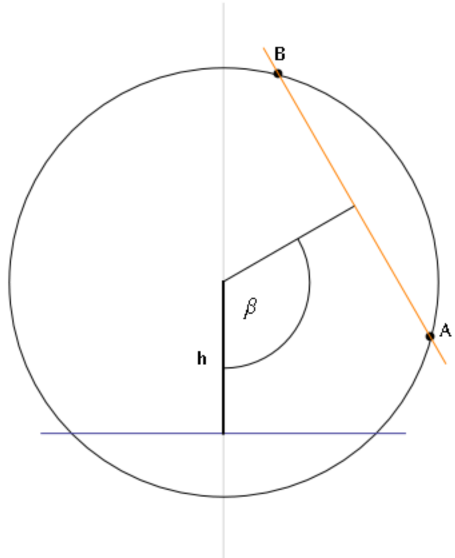
$$F : \mathbb{R} \to [0,1],$$
$$F(x) = P[\|A - B\| \leq x] = P\left(\{\omega \in \Omega | \, \|A(\omega) - B(\omega)\| \leq x\}\right).$$

Bitte wenden

b) Beweisen Sie, dass $\|A - B\|$ eine Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ besitzt, und geben sie eine solche Dichte f an. (Gemeint ist natürlich eine Dichte der Verteilung $\mathcal{L}_P(\|A - B\|)$ von $\|A - B\|$ bezüglich des Lebesguemaßes.)

Aufgabe 3

Betrachten Sie das folgende andere Modell, in dem auch zufällig eine Kreissehne des Einheitskreises ausgewählt wird:



Ein zufälliges Ergebnis $\omega = (h, \beta) \in \Omega :=]0,1[\times]0,2\pi[$ wird gemäß der Gleichverteilung $P = \text{unif}(\Omega)$ gewählt. Durch h wird die vorläufige Sekante ausgewählt, welche die y-Achse im Abstand h unterhalb des Kreismittelpunktes senkrecht schneidet. Aus dieser Sekante wird schließlich die endgültige Sekante $[A(\omega), B(\omega)]$ durch Rotieren der vorläufigen um den Winkel β erzeugt. (Siehe Skizze)

a) Beschreiben Sie die Zufallsvariablen $A, B : \Omega \to S^1$ durch je eine Formel.

b) Bestimmen Sie auch in diesem Modell die Verteilungsfunktion F von $\|A - B\|$:

$$F : \mathbb{R} \to [0,1],$$
$$F(x) = P[\|A - B\| \leq x] = P\left(\{\omega \in \Omega | \; \|A(\omega) - B(\omega)\| \leq x\}\right)$$

c) Beweisen Sie auch in diesem Modell, dass $\|A - B\|$ eine Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ besitzt, und geben sie eine solche Dichte f an.