Blatt Nr. 2 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik für Lehramt
SS 2016
Abgabe erfolgt in den Tutorien

Aufgabe 1

Betrachten Sie zwei Folgen $(r_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(b_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$ mit $r_l \to \infty$ und $b_l \to \infty$ und $r_l/b_l \to p \in [0,1]$ für $l \to \infty$. Wie in Aufgabe 1 in Tutorienblatt 2 werden n Kugeln aus r_l roten und b_l blauen Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen, wobei n nicht von l abhängen soll.

Betrachten Sie das Ereignis $A_{r_l,b_l,n,m}$ =“Es wurden m rote Kugeln gezogen” für gegebenes $m \leq n$. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{l\to\infty} P_{r_l,b_l,n}(A_{r_l,b_l,n,m})$$

und vergleichen Sie mit den Grenzwert mit dem Wert bei einem analogen Experiment *mit* Zurücklegen der Kugeln.

Aufgabe 2

In der Situation von Aufgabe 4 in Tutorienblatt2: Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Ereignisse (d.h. Borel-messbar) sind und finden Sie die Wahrscheinlichkeit von A_0:

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{“}Z_7 = Z_{10} = 3'' \\ A_1 &= \text{“}Z_n = 3 \text{ für unendlich viele } n'' \\ A_2 &= \text{“}Z_n = 3 \text{ schließlich für } n \to \infty'' \end{aligned} \tag{1}$$

Sprechweise: Eine Aussage “$\Phi(n)$ gilt schließlich für $n \to \infty$” bedeutet, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\Phi(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 3

Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben. Beweisen Sie die folgende Aussage für alle Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 4

Lesen und verstehen Sie den Beweis des Dynkin Lemmas (im Anhang). Das Dynkin Lemma ist von großer Bedeutung für die Stochastik und wird mehrfach ohne Beweis benutzt werden.

Das Dynkin-Lemma

Definition: Es sei Ω ein Ergebnisraum. Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System* über Ω, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$
2. Für alle $A \in \mathcal{D}$ folgt $A^c \in \mathcal{D}$.
3. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter* Mengen in $\mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{n\in N} A_n \in \mathcal{D}$.

Man beachte: Anders als in der Definition von σ-Algebren wird hier in der dritten Bedingung die paarweise Disjunktheit der Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, vorausgesetzt!

Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ wird *durchschnittsstabil* genannt, wenn für alle $A, B \in \mathcal{M}$ auch $A \cap B \in \mathcal{M}$ gilt.

Dynkin-Lemma (auch Π-Λ-Theorem): Es sei Ω ein Ergebnisraum, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System über Ω. Dann gilt: Aus $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$.

Beweis:

1. Schritt. Ist $\mathcal{D}_1$ ein Dynkin-System über Ω, so gilt:
Für alle $A, B \in \mathcal{D}_1$ mit $A \subseteq B$ folgt $B \setminus A \in \mathcal{D}_1$.
Beweis hierzu: Die Mengen B^c und A sind disjunkt. Nun gilt $B^c \in \mathcal{D}_1$ wegen $B \in \mathcal{D}_1$. Zusammen mit $A \in \mathcal{D}_1$ folgt

$$(B \setminus A)^c = A \cup B^c \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \in \mathcal{D}_1$$

und damit $B \setminus A \in \mathcal{D}_1$.

2. Schritt. Es gibt ein kleinstes Dynkin-System $\mathcal{G}$ über Ω, das $\mathcal{M}$ umfaßt, nämlich den Durchschnitt aller Dynkin-Systeme über Ω, die $\mathcal{M}$ umfassen:

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \Omega \mid \text{Für jedes Dynkin-System } \mathcal{E} \text{ über } \Omega \text{ mit } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \text{ gilt } A \in \mathcal{E}.\}$$

3. Schritt. Wir setzen:

$$\mathcal{G}_1 = \{A \in \mathcal{G} \mid \forall B \in \mathcal{M}:\ A \cap B \in \mathcal{G}\}$$

Dann ist $\mathcal{G}_1$ ein Dynkin-System über Ω, das $\mathcal{M}$ umfaßt: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_1$.
Beweis hierzu:

- Es gilt $\emptyset \in \mathcal{G}_1$, da für alle $B \in \mathcal{M}$ gilt: $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{G}$.

- Ist $A \in \mathcal{G}_1$, so folgt für alle $B \in \mathcal{M}$ mit Hilfe des 1. Schritts:

$$A^c \cap B = B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{G},$$

denn es gelten $B \in \mathcal{G}$ wegen $B \in \mathcal{M}$, $A \cap B \in \mathcal{G}$ wegen $A \in \mathcal{G}_1$, und $A \cap B \subseteq B$. Wir schließen: $A^c \in \mathcal{G}_1$.

- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{G}_1$, so folgt für alle $B \in \mathcal{M}$:

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) \in \mathcal{G},$$

denn die $A_n \cap B$, $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{G}$. Wir schließen: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}_1$.

- Es gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_1$. Zum Beweis hiervon sei $A \in \mathcal{M}$ gegeben. Dann folgt für alle $B \in \mathcal{M}$ die Aussage $A \cap B \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$, weil $\mathcal{M}$ durchschnittstabil ist. Das bedeutet $A \in \mathcal{G}_1$.

4. Schritt. Weil $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$ ein Dynkin-System über Ω mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_1$ ist, folgt auch $\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}$, weil $\mathcal{G}$ das *kleinste* Dynkin-System über Ω ist, das $\mathcal{M}$ als Teilmenge hat. Das bedeutet: $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$. Nach der Definition von $\mathcal{G}_1$ impliziert das für alle $A \in \mathcal{G}$ und alle $B \in \mathcal{M}$ die Aussage $A \cap B \in \mathcal{G}$.

5. Schritt. Wir setzen:

$$\mathcal{G}_2 := \{B \in \mathcal{G} \mid \forall A \in \mathcal{G} :\ A \cap B \in \mathcal{G}\}$$

Dann ist $\mathcal{G}_2$ ein Dynkin-System über Ω mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_2$.
Der *Beweis hierzu* ähnelt ein wenig dem Beweis im 3. Schritt:

- Es gilt $\emptyset \in \mathcal{G}_2$, da für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt: $A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{G}$.

- Es sei $B \in \mathcal{G}_2$ gegeben. Dann folgt für alle $A \in \mathcal{G}$ mit Hilfe des 1. Schritts:

$$A \cap B^c = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{G},$$

da $A \cap B \in \mathcal{G}$ wegen $B \in \mathcal{G}_2$. Dies impliziert $B^c \in \mathcal{G}_2$.

- Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{G}_2$, so folgt für alle $A \in \mathcal{G}$:

$$A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n) \in \mathcal{G},$$

denn die Mengen $A \cap B_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{G}$. Wir schließen: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}_2$.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}_2$ ist klar nach dem vierten Schritt.

6. Schritt. Wie im 4. Schritt folgt $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, also ist das Mengensystem $\mathcal{G}$ durchschnittsstabil.

7. Schritt. Jedes durchschnittstabile Dynkin-System ist eine σ-Algebra. Insbesondere ist $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra.
Beweis hierzu: Es sei $\mathcal{G}'$ durchschnittstabiles Dynkin-System. Weil $\mathcal{G}'$ als Dynkin-System die leere Menge als Element enthält und abgeschlossen unter Komplementbildung ist, bleibt nur zu zeigen, dass $\mathcal{G}'$ auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigungsbildung ist. Hierzu sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von $\mathcal{G}'$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = A_n \cap \bigcap_{m<n} A_m^c.$$

Dann gilt $B_n \in \mathcal{G}'$, weil $\mathcal{G}'$ durchschnittstabil und abgeschlossen unter Komplementbildung ist. Nun sind die B_n, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}'.$$

Das Mengensystem $\mathcal{G}'$ ist also in der Tat abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigungsbildung.

8. Schritt. Aus $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$ folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{G}$, weil $\mathcal{G}$ nach dem 7. Schritt eine σ-Algebra ist und $\sigma(\mathcal{M})$ die *kleinste* σ-Algebra ist, die $\mathcal{M}$ umfaßt. Weiter wissen wir $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$, weil $\mathcal{G}$ das *kleinste* Dynkin-System ist, das $\mathcal{M}$ umfaßt. Es folgt die Behauptung: $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$.