Blatt Nr. 13 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik für Lehramt
SS 2016
Abgabe erfolgt in den Tutorien

Aufgabe 1

Es sei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte $L_Z(s) = E_P[e^{sZ}]$ von Z.

b) Beweisen Sie für $a > 0$:

$$P[Z \geq a] \leq e^{-a^2/2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die exponentielle Tschebyscheff-Ungleichung.

Aufgabe 2

Es sei $0 < p < 1$ gegeben. Weiter sei X_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge binomialverteilter Zufallsvariablen mit den Parametern n und p.

a) Berechnen Sie für $m, k \in \mathbb{N}$ mit $k < m$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nm} \log P[X_{nm} = nk].$$

Hinweis: Verwenden Sie Ideen aus dem Beweis des Satzes von de Moivre-Laplace.

b) Vergleichen Sie das Ergebnis aus a) im Fall $k/m > p$ mit der oberen Schranke für

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nm} \log P[X_{nm} \geq nk],$$

die aus der exponentiellen Tschebyscheff-Ungleichung folgt.

Aufgabe 3

Singulärstetige Maße auf dem Einheitsintervall. Es sei $0 < p < 1$. Weiter seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_n = 1] = p$. Wir setzen

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n, \quad Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])).$$

Es bezeichne $\mu_p := \mathcal{L}_P(Z)$ die Verteilung von Z. Insbesondere ist $\mu_{1/2}$ die Gleichverteilung auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. Zeigen Sie:

a) Die Verteilungsfunktion von Z ist stetig.

b) Ist $p \neq 1/2$, so gibt es ein $M \in \mathcal{B}([0,1]))$ mit $\mu_{1/2}(M) = 0$ und $\mu_p(M) = 1$. Man sagt hierzu: $\mu_{1/2}$ und μ_p sind *orthogonal zueinander*.
Hinweis: Verwenden Sie das Starke Gesetz der großen Zahlen.

c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von Z im Fall $p = 1/3$ von Hand, oder plotten Sie diese mit einem Computer.

Aufgabe 4

Lesen und verstehen Sie den Beweis des zentralen Grenzwertsatzes für i.i.d. Zufallsvariablen mit endlicher Varianz:
`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~merkl/ss16/stoch/zgws.pdf`