Blatt Nr. 12 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik für Lehramt
SS 2016
Abgabe erfolgt in den Tutorien

Aufgabe 1

Ein Glücksspiel. Arno und Benno spielen folgendes Spiel: Jeder wählt anfänglich eine Sequenz (x, y), $x, y \in \{0, 1\}$. Danach wird mit einer fairen Münze eine 0-1 Folge erzeugt und jedesmal, wenn die Sequenz eines Spielers auftaucht, bekommt er vom Gegenspieler einen Euro.

a) Zeigen Sie: Wenn die Münze n mal geworfen wird, so hängt die erwartete Anzahl Arnos Treffer nicht von der Sequenz ab, die er gewählt hat.

b) Arno wählt also die erste Sequenz, die ihm einfällt, nämlich (0,0), worauf Benno sich für die Sequenz (1,0) entschließt. Sie vereinbaren nun solange zu spielen, bis zweimal eine Zahlung stattfindet. Wie groß ist Arnos erwarteter Gewinn?

Aufgabe 2

Simulation durch Ausdünnung: vollständige Modellierung. Es sei f eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte auf $[0, 1]$ mit oberer Schranke $f \leq M \in \mathbb{R}$. Es sei $U_n = (X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine iid Folge von Zufallsvektoren über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $R := [0, 1] \times [0, M]$, gleichverteilt in R. Weiter sei $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ Y_n \leq f(X_n)\}$. Zeigen Sie: P-fast sicher ist $T < \infty$, und die Zufallsvariable $X_T : \Omega \to [0, 1]$, $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ besitzt die Dichte f, wobei wir noch formal $X_\infty := 0$ setzen.

Aufgabe 3

Die Gleichverteilung auf hochdimensionalen Sphären. Für jedes sei $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n = (X_{1,n}, \ldots, X_{n,n})$ ein auf der Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 = 1\}$ gleichverteilter Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}X_{1,n}$ konvergiert für $n \to \infty$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. *Hinweis:* Die Gleichverteilung auf der Sphäre S^n ist die Verteilung von $X/\|X\|_2$, wenn X n-dimensional standardnormalverteilt ist. Verwenden Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.