Blatt Nr. 10 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik für Lehramt
SS 2016
Abgabe erfolgt in den Tutorien

Aufgabe 1

Faltung von 3 Gleichverteilungen. Es seien X, Y und Z unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Berechnen und skizzieren Sie die Dichte von $X+Y+Z$.

Aufgabe 2

Es seien $Z_n, n \in \mathbb{N}_0$ i.i.d. auf $\{0,1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie:
Die durch die Nachkommaziffern Z_n dargestellte Binärzahl

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} Z_n \tag{1}$$

ist uniform auf $[0,1]$ verteilt.
Hinweis: Die Ereignisse $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[\,, k = 0, 1, \dots 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ bilden zusammen mit $\emptyset$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}([0,1])$. Zeigen Sie zuerst, dass dieses Erzeugendensystem auch durchschnittstabil ist.

Aufgabe 3

Eine Verallgemeinerung der Simulation durch "Ausdünnung". Es seien $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ zwei Wahrscheinlichkeitsdichten. Es gelte $g \le c \cdot f$ mit einer Konstanten $c > 0$. Nun seien X und U zwei unabhängige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Zufallsvariable X besitze die Dichte f bezüglich P. Zudem sei U bezüglich P uniform auf $]0,1[$ verteilt. Zeigen Sie:

a) Die Verteilung $\mathcal{L}_P(Z)$ von $Z = (X, f(X)U)$ ist die Gleichverteilung auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x)\}$.

b) Bezüglich des bedingten Maßes $P(\cdot | cf(X)U < g(X))$ besitzt X die Dichte g.

c) Schlagen Sie ein Verfahren zur Simulation einer Zufallszahl mit Dichte g vor, wenn Zufallszahlen mit Dichte f und auf $]0,1[$ gleichverteilte Zufallszahlen (alle unabhängig voneinander) zur Verfügung stehen.