Mathematisches Institut
LMU München

AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

12. April 2018

Nachklausur zur Analysis einer Variablen
WS 2017/18

Name, Vorname	
Mat.Nr.	
Studiengang	
PO-Version, Abschluss	
HF/NF	

Hinweise

1. Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt, auch dieses Deckblatt, gut lesbar Ihren Namen.
2. Hilfsmittel sind *nicht* erlaubt.
3. Bitte legen Sie vor Beginn Ihren Lichtbildausweis zusammen mit Ihrem Studierendenausweis auf das Pult.

Bewertung

1. Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
2. Sie haben die Klausur mit der Hälfte der erreichbaren Punkte bestanden.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt **150 Minuten**.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							

Viel Erfolg!

1. (a) Definieren Sie Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

2. (a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

   (b) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}$ absolut konvergiert und begründen Sie Ihre Antwort.

3. (a) Formulieren Sie den Satz von Eudoxos.

   (b) Es sei eine Funktion $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ gegeben durch

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \in (0,\infty) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass f stetig ist im Punkt 1 und unstetig in allen anderen Punkten.

   Hinweis: Sie dürfen Folgendes ohne Beweis verwenden. Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to x$ und $b_n \to x$ und so dass $a_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Definieren Sie Konvexität für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.

   (b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte konvexe Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = a$. Zeigen Sie: Ist $a \geq 0$, so gilt $f(x) \geq ax$ für alle $x \geq 0$.

5. (a) Es sei $I = (a, b), a < b$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $f : I \to \mathbb{C}$ eine n-mal differenzierbare Funktion.

      i. Definieren Sie das n-te Taylorpolynom T_n von f in einem Punkt $x_0 \in I$.

      ii. Formulieren Sie den Satz von Taylor für f.

   (b) Berechnen Sie das 4. Taylorpolynom der Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1-x}$ im Punkt $x_0 = 0$.

6. (a) Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

   (b) Berechnen Sie die Integrale

   $$\int_0^1 xe^{x^2} dx \text{ und } \int_0^{\pi} x\cos(x) dx.$$