Mathematisches Institut
LMU München

AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

16. Februar 2018

Klausur zur Analysis einer Variablen
WS 2017/18

Name, Vorname	
Mat.Nr.	
Studiengang	
PO-Version, Abschluss	
HF/NF	

Hinweise

1. Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt, auch dieses Deckblatt, gut lesbar Ihren Namen.
2. Hilfsmittel sind *nicht* erlaubt.
3. Bitte legen Sie vor Beginn Ihren Lichtbildausweis zusammen mit Ihrem Studierendenausweis auf das Pult.

Bewertung

1. Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
2. Sie haben die Klausur mit der Hälfte der erreichbaren Punkte bestanden.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt **150 Minuten**.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							

Viel Erfolg!

1. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

2. (a) Definieren Sie Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

3. (a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definieren Sie Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in I$.

   (b) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie:

   i) f ist stetig ist für $x \neq 0$.

   ii) f ist unstetig im Punkt $x = 0$.

4. (a) Formulieren Sie den Satz von Rolle.

   (b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.

5. (a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Definieren Sie Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in I$.

   (b) Es sei die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x)} & \text{für } x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von f in 0.

6. Ziel dieser Aufgabe ist es, das Integral $\int_0^1 x^3 dx$ zu berechnen.

   (a) Finden Sie eine Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktion $\tau_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion x^3 konvergiert und zeigen Sie dies.

   (b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x^3 dx$, indem Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \tau_n(x) dx$ bilden.

   Hinweis: Die Aussage aus Aufgabe 1 könnte nützlich sein.