AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 9

Abgabe Di 19.12.17, 14 Uhr.

1. (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ konvergiert.

   (b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, so dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ konvergiert.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

   $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   in keinem Punkt stetig ist.

   (b) Gegeben sei die Abbildung

   $$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q}, \text{ für } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Zeigen Sie, dass g in jedem irrationalen Punkt stetig und in jedem rationalen Punkt unstetig ist.

3. (a) $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $M : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ ebenfalls stetig ist.

   (b) Eine Abbildung der Form $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, ..., n\}$, wird als Polynom mit komplexen Koeffizienten bezeichnet. Zeigen Sie, dass P auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist.

4. (a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : [-b, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3}{n}$ für jedes $b > 0$ gleichmäßig gegen $f : [-b, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$ konvergiert.

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3}{n}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig, gegen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$ konvergiert.