AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 8

Abgabe Di 12.12.17, 14 Uhr.

1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+11}{2n^4+1}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{2n+3})^n$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$ für $a \in (-1, 1)$.
2. (a) Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.
   (b) Finden Sie ein Beispiel für eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit der Eigenschaft, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass die entsprechende Voraussetzung des aus der Vorlesung bekannten Quotientenkriteriums nicht in dieser Form abgeschwächt werden kann.
3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei außerdem $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.
   (a) Zeigen Sie, dass $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist.
   (c) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt: $s_0 \geq s_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$. Insbesondere sind die Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
   (d) Folgern Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert. Dieses Konvergenzkriterium wird als *Leibniz-Kriterium* bezeichnet.
   (e) Finden Sie ein Beispiel einer konvergenten Reihe, die nicht absolut konvergiert.
4. (a) Gegeben seien die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, wobei $a_k \geq b_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ebenfalls divergent ist. Dieses Kriterium bezeichnet man als *Minorantenkriterium*.
   (b) Folgern Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent ist.