AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 7

Abgabe Di 05.12.17, 14 Uhr.

1. Gegeben sei eine beliebige reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, die in $\mathbb{R}$ konvergiert oder bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert.

2. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a konvergiert. Folgern Sie, dass jede konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt, nämlich den Grenzwert der Folge.

   (b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge mit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$. Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

3. Durch die Vorschrift $a_{n+1} := 4 - \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 := 1$ sei rekursiv die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge ist und folgern Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   (b) Begründen Sie, dass die Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergiert und verwenden Sie dies zusammen mit der Rekursionsvorschrift und den Rechenregeln für Grenzwerte, um den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu bestimmen.

   Hinweis: Um in Teil (a) induktiv zu zeigen, dass $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kann es hilfreich sein, sowohl a_{n+1} als auch a_n mittels Rekursionsvorschrift zu ersetzen und den sich ergebenden Ausdruck durch die Induktionsvoraussetzung abzuschätzen.

4. (a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge $(\zeta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\zeta := \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ die dritte Einheitswurzel bezeichnet.

   (b) Gegeben sei die reelle Folge $\left((-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}(5 + (-1)^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich $x \in \mathbb{R}$ ist, beziehungsweise $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte dieser Folge.