AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 5

Abgabe Di 21.11.17, 14 Uhr.

1. (a) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $y \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = a$, so ist $-y$ die einzige andere Lösung.
   (b) Zeigen Sie, dass stets eine komplexe Zahl existiert, welche die Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{C}$ löst.
   (c) Folgern Sie, dass $\pm i$ die einzigen Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ sind.

2. Sei $\zeta := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\zeta^3 = 1$, $|\zeta| = 1$ und $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$. (Wegen der ersten Eigenschaft bezeichnet man ζ als eine *dritte Einheitswurzel*.)
   (b) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a + b\zeta + c\zeta^2 = 0$. Zeigen Sie, dass dann stets $|a - b| = |b - c| = |c - a|$ und somit das Dreieck mit Eckpunkten a, b und c in der komplexen Zahlenebene gleichseitig ist.

3. Seien X, Y Mengen. Wir bezeichen eine Menge als abzählbar, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Beweisen Sie:
   (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge aller n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar .
   (b) Existiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to X$, so ist X abzählbar.
   (c) Wenn X nicht abzählbar ist und es eine surjektive Abbildung $Y \to X$ gibt, so ist Y ebenfalls nicht abzählbar.
   (d) Das kompakte Intervall $[0, 1]$ ist nicht abzählbar.

   Hinweis: Zum Lösen der einzelnen Aufgaben könnte es hilfreich sein jeweils die Aussagen vorhergehender Teilaufgaben zu betrachten.

4. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass sich unter der Annahme der Supremumseigenschaft durch Anwendung der Körper- und Anordnungsaxiome zeigen lässt, dass für jede Intervallschachtelung $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ eine eindeutige reelle Zahl x existiert mit $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$.
   Zeigen Sie, dass umgekehrt unter der Annahme dieses Intervallschachtelungsprinzips und des Archimedischen Axioms durch Anwendung der Körper- und Anordnungsaxiome die aus der Vorlesung bekannte Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ folgt.