AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 3

Abgabe Di 07.11.17, 14 Uhr.

1. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen gelten.

   (a) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

   (b) $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$
   Hinweis: Mit $\max(a, b)$ ist das Maximum der Menge $\{a, b\}$ gemeint, bzw. die größere der beiden Zahlen.

2. Betrachten Sie die Menge $\{1 - \frac{1}{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$.
   Begründen Sie, ob diese Menge ein Maximum besitzt und bestimmen Sie es gegebenenfalls.
   Besitzt diese Menge ein Supremum? Falls ja, geben Sie es an und begründen Sie ihre Wahl.
   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, den Satz von Eudoxos zum richtigen Zeitpunkt anzuwenden.

3. Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass stets ein $b \in B$ existiert, welches eine obere Schranke für A darstellt, falls $\sup(A) < \sup(B)$.

   (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden beiden Aussagen:

   $$\sup(A \cup B) = \max\big(\sup(A), \sup(B)\big)$$

   $$\sup(A \cap B) = \min\big(\sup(A), \sup(B)\big)$$

4. (a) Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a > -1$ sowie $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gegeben. Beweisen Sie, dass $(1 + a)^n > 1 + na$ gilt, falls $a \neq 0$.

   (b) Seien $b, x \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $b^n > x$.
   Hinweis: Teilaufgabe (a) könnte bei der Lösung hilfreich sein.