AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 2

Abgabe Di 31.10.17, 14 Uhr.

1. (a) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Für welche(s) k ist $\binom{n}{k}$ maximal?

2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über reelle Zahlen. Verwenden Sie dabei nur die Körpereigenschaften aus der Vorlesung. Geben Sie bei **jedem** Schritt an, welche Eigenschaft Sie verwenden.
   (a) $x \cdot 0 = 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ für $x, y \neq 0$.
   (c) $(-x)(-y) = xy$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
   (d) Wenn $xy = 0$, dann $x = 0$ oder $y = 0$.

3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über reelle Zahlen. Verwenden Sie dabei nur die Körpereigenschaften aus der Vorlesung. Geben Sie bei **jedem** Schritt an, welche Eigenschaft Sie verwenden. Sie dürfen dabei schon bewiesene Ergebnisse aus vorhergehenden Teilaufgaben verwenden.
   (a) $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $1 > 0$, und dass $n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für alle $x > 0$. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die $x + \frac{1}{x} = 2$ gilt.
   (c) Zeigen Sie, dass $(\frac{x+y}{2})^2 \geq xy$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

4. (Manhattenproblem) Betrachten Sie ein Koordinatensystem. Wir wollen vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt (n, m) mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ gelangen. In jedem Schritt dürfen wir uns nur um eine Längeneinheit bewegen, entweder horizontal nach rechts oder vertikal nach oben. Anders ausgedrückt, wir können vom Punkt (r, s) entweder zu $(r + 1, s)$ oder zu $(r, s + 1)$ gelangen. Beispielsweise beschreibt $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3)$ einen solchen Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 3)$.
   (a) Zeigen Sie, dass es genau $\binom{n+m}{m}$ solche Wege von $(0, 0)$ nach (n, m) gibt.
   (b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
   Hinweis: Interpretieren Sie da Problem kombinatorisch und benutzen Sie Teilaufgabe (a). Unterteilen Sie gültige Wege in zwei Abschnitte.