AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 13

Abgabe Di 30.01.18, 14 Uhr.

1. (4 Punkte) Finden Sie zunächst eine Abbildung f, so dass $\sin'(x) = f(\sin(x))$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und nutzen Sie diese Identität, um die Ableitung der Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ des Sinus zu ermitteln. Bestimmen Sie durch ein analoges Vorgehen außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ des Kosinus.

2. (5 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion e^x auf $\mathbb{R}$ strikt konvex ist.

   (b) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konkave und $g : I \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g in höchstens zwei Punkten schneiden.

   (c) Es sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^x - 2 - ax = 0$ genau zwei reelle Lösungen hat.

3. (3 Punkte) Begründen Sie zunächst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln'(1)$ und nutzen Sie dies, um $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ zu bestimmen.

4. (4 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ eine eindeutige Darstellung der Form $z = e^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ besitzt.

   (b) Zeigen Sie, dass sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ auf eindeutige Weise in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darstellen lässt und bestimmen Sie diese Darstellung explizit für $z = 1 + i$.