AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 12

Abgabe Di 23.01.18, 14 Uhr.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

   überall differenzierbar ist und dass ihre Ableitung f' im Punkt 0 *nicht* stetig ist.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$, die zudem im Punkt 0 differenzierbar sei mit Ableitung $f'(0) > 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \epsilon]$ und $f(x) < 0$ für alle $x \in [-\epsilon, 0)$.
   (b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass f im Allgemeinen jedoch nicht lokal monoton ist, d.h. es existiert im Allgemeinen kein $\epsilon > 0$, so dass $f\big|_{[-\epsilon,\epsilon]} : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}$ monoton ist.

3. Betrachten Sie eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ und beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Ist g monoton, aber nicht streng monoton, dann existiert ein (nicht zu einem Punkt entartetes) Teilintervall $J \subseteq I$, auf dem g konstant ist.
   (b) Ist g zudem differenzierbar mit entweder $g'(x) \leq 0$ oder $g'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ und $g'(x) = 0$ nur für endlich oder abzählbar unendlich viele Punkte, dann ist g *streng* monoton.

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte auf direktem Wege oder mit Hilfe der L'Hospitalschen Regel.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)^2}{x^2} \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0} x^a \ln(x)\ ,\ a > 0$$