AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 11

Abgabe Di 16.01.18, 14 Uhr.

1. (3 Punkte) Gegeben sei für $a \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ x \mapsto e^{ax}$. Zeigen Sie, dass
$$f'(x) = ae^{ax}.$$
Hinweis: Sie können in dieser Aufgabe nicht die Kettenregel verwenden, denn $\mathbb{R} \to \mathbb{C};\ x \mapsto ax$ ist keine reelle Funktion für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2. (3 Punkte) Gegeben sei für $I \subseteq \mathbb{R}$ die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f genau dann differenzierbar ist, wenn ihr Realteil $\operatorname{Re} f : I \to \mathbb{R}$ und ihr Imaginärteil $\operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind mit
$$(\operatorname{Re} f)' = \operatorname{Re}(f') \text{ und } (\operatorname{Im} f)' = \operatorname{Im}(f').$$

3. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto |x|$ im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

4. (8 Punkte) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:
   (a) $f_1(x) = (2x+5)^4,\ x \in \mathbb{R}$
   (b) $f_2(x) = \frac{x}{x^2-4},\ |x| \neq 2$
   (c) $f_3(x) = \sqrt{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
   (d) $f_4(x) = x\ln(x),\ x > 0$
   (e) $f_5(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$