AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 10

1. Wir zeigen die Aussage durch Induktion.
   $n = 1$: In diesem Fall ist die Aussage offenbar erfüllt, denn
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6}1(1+1)(2+1).$$
   $n \to n+1$: Angenommen $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (*) ist für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, dann folgt
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &\overset{(*)}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\big((n+2)(2n+3)\big) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)\end{aligned}$$

2. (a) Offenbar gilt für $n \in \mathbb{N}$, dass $\frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2n^4-1}} = \frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n^4}\sqrt{2-\frac{1}{n^4}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^4}}}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Exponentialfunktion (*) und die Wurzelfunktion (**) stetig sind (– bei der Wurzel folgt das z.B. aus Aufgabe 2 von Blatt 3 –) sowie, dass $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist. Somit folgt,
$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2-\frac{1}{n^4}} \overset{(**)}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty}(2-(\frac{1}{n})^4)} = \sqrt{2-0^4} = \sqrt{2} \neq 0,$$
   wobei bei der zweiten Folge die Rechenregeln für Grenzwerte verwendet wurden. Damit lässt sich die Rechenregel für Quotienten von Grenzwerten anwenden und es folgt:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2n^4-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{20n^3 + 4n^2}{(n+1)^5} = \frac{n^3(20 + 4\frac{1}{n})}{n^5 \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^5}_{>1}} \leq \frac{24}{n^2}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (absolut) konvergiert und somit offenbar auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2}$. Folglich konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20n^3+4n^2}{(n+1)^5}$ nach dem Majorantenkriterium.
(c) (ii) Sei $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, dann gilt $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Die Folge (a_n) (, bzw. die harmonische Reihe,) divergiert jedoch gemäß Vorlesung.
Die Aussage ist folglich falsch.

3. Für $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ eine Potenzreihe mit konstanten Koeffizienten $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ folgt mit Cauchy-Hadamard, dass der Konvergenzradius $R = 1$ ist. Also konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Weil für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ die Folge (z^n) keine Nullfolge ist, ist die Reihe auch dort divergent.

4. (b) i) Da konstante Funktionen stetig sind, ist f in allen Punkten $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. In 0 ist f jedoch unstetig, denn $(\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge und es gilt $f(\frac{1}{n}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber $f(0) = 0$. Also konvergiert $f(\frac{1}{n})$ nicht gegen $f(0)$.

   ii) Die angegebene Funktion g ist konstant auf $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ und damit dort stetig. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ ist stetig und streng monoton steigend. Nach einem Resultat der Vorlesung ist die Umkehrfunktion $\sqrt[3]{x}$ auch stetig. Also ist auch die Funktion $\exp(\sqrt[3]{x+1})$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Weiter ist die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x \exp(\sqrt[3]{x+1})$ als Produkt stetiger Funktionen stetig. Wegen $g(x) = h(x)$ für $x > 0$, folgt, dass g auch auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ stetig ist. Es bleibt die Stetigkeit in 0 zu prüfen. Es gilt $h(0) = 0$. Die Stetigkeit von h in 0 impliziert, dass wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so dass $|h(x)| < \epsilon$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$. Wegen $|g(x)| \leq |h(x)|$ folgt, dass g auch in 0 stetig ist.

5. (b) Es sei eine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - x$. Als Summe zweier stetiger Funktionen ist g selbst stetig. Wegen $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$, folgt $g(0) = f(0) \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Der Zwischenwertsatz impliziert, dass g eine Nullstelle hat, also dass $x_0 \in [0,1]$ existiert mit $g(x_0) = 0$. Es folgt, dass $f(x_0) = x_0$ und x_0 somit ein Fixpunkt von f ist.

6. (b) i) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := z^n$ eine Nullfolge ist. Insbesondere gilt für jedes $x \in [0,1)$, dass $(f_n(x))$ eine Nullfolge ist. Dies zeigt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Um einzusehen, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist, werden wir zeigen, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $x_N \in [0,1)$ existiert, so dass $f_N(x_N) \geq \frac{1}{2}$ gilt. Dies folgt direkt aus der Stetigkeit der Funktion $g_N : [0,1] \to [0,1]; x \mapsto x^N$. (Die Stetigkeit von Polynomfunktionen wurde

in der Vorlesung bewiesen.) Es gilt somit $\lim_{x\to 1} g_N(x) = g_N(1) = 1$. Insbesondere existiert $x_N \in [0,1)$ mit $g_N(x_N) \geq \frac{1}{2}$. Wegen $g_N|_{[0,1)} = f_N$ folgt die Behauptung.

ii) Für $b = \frac{1}{2}$ ist die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion. Denn für jedes $\epsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 \leq f_n(\frac{1}{2}) \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Weil für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : [0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, folgt $0 \leq f_n(x) \leq \epsilon$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2})$ und $n \geq n_0$.

7. (a) Nach Definition gilt $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Für $x > 0$ folgt $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ und damit auch $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Also $\frac{e^x}{x} > N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x \geq 2N$. Es folgt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

   (b) Der natürliche Logarithmus $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Insbesondere ist ln streng monoton steigend und es gilt $\ln(x) < -1$ für $x < \frac{1}{e}$. Es folgt $\frac{\ln(x)}{x} < -N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x < \min\{\frac{1}{e}, \frac{1}{N}\}$. Also $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.