**AB Geometrie & Topologie**
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

# Analysis einer Variablen

Übungsblatt 10

**Hinweis:** Dieses Blatt bitte nicht abgeben. Eine Korrektur wird ausnahmsweise nicht erfolgen.

1. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Identität erfüllt ist:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. (a) Untersuchen Sie, ob die Folge $\left(\frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2n^4-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
   (b) Bestimmen Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20n^3+4n^2}{(n+1)^5}$ konvergiert.
   (c) Gegeben sei eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      i. Formulieren Sie die Definition der Aussage:
      „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge“.
      ii. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert.

4. (a) Formulieren Sie für $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, die Definition der Aussage, dass $f$ stetig ist.
   (b) Beweisen Sie in welchen Punkten ihres Definitionsbereich die folgenden Funktionen stetig sind.
      i. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$
      ii. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ x\exp(\sqrt[3]{x+1}), & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

5. (a) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

(b) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$. Zeigen Sie, dass $f$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert $x_0 \in [0,1]$, so dass $f(x_0) = x_0$.
*Hinweis*: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf eine geeignete Hilfsfunktion an.

6. (a) Für $D \subseteq \mathbb{R}$ sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung. Formulieren Sie die Definition der Aussage: „$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f$."

   (b) Für $b > 0$ sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,b) \to x^n$ gegeben.

      i. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $f : [0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$ konvergiert, falls $b = 1$.

      ii. Begründen Sie, ob die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Fall $b = \frac{1}{2}$ gleichmäßig konvergiert.

7. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln(x)}{x}$

   *Hinweis:* Es dürfen ausschließlich Resultate verwendet werden, die bereits aus der Vorlesung bekannt sind. Insbesondere ist der Satz von l'Hospital *nicht* zulässig.