AB Geometrie & Topologie
Stephan Stadler
Phillip Grass
Markus Nöth

Analysis einer Variablen

Übungsblatt 1

Abgabe Di 24.10.17, 14 Uhr.

1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen per vollständiger Induktion.
   (a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $\prod_{i=0}^{n-1}(1 + x^{2^i}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Zeigen Sie, dass $n(n^2 + 5)$ durch 6 teilbar ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   Hinweis: Für natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gilt a *teilt* b, wenn es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a \cdot k = b$.

3. (a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass man in einer Menge von $n+1$ paarweise verschiedenen Zahlen, alle kleiner oder gleich $2n$, immer eine Zahl findet, die eine andere teilt.
   (b) Bleibt die Aussage in (a) wahr, wenn man $n + 1$ durch n ersetzt?

4. Behauptung: Alle Bälle haben die gleiche Farbe.

   „Beweis“: Induktion nach n, der Anzahl der Bälle.

   Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Aussage natürlich.

   Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n gilt und zeigen sie für $n + 1$. Gegeben sei also eine Menge von $n + 1$ Bällen. Wir entfernen einen Ball. Nach Induktionsannahme haben die restlichen n Bälle alle die gleiche Farbe. Wir legen den ersten Ball zurück und entfernen einen anderen. Nach Induktionsannahme hat also der zuerst herausgenommene Ball die gleiche Farbe wie die anderen $n - 1$ Bälle. Es folgt, dass alle $n + 1$ Bälle die gleiche Farbe besitzen.

   Überzeugt Sie diese Argument? Wo genau liegt der logische Fehler?