Mathematisches Institut der LMU
Prof. M. Napiórkowski
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2018/19
20. 12. 2018

Übungsblatt 8

8.1. Seien $\Omega := (-1,1) \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $p \in [1,\infty]$ gilt $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Für alle $p \in [1,\infty)$ gilt $f \in H^{1,p}(\Omega)$.

(c) $f \notin H^{1,\infty}(\Omega)$. Für alle $g \in C^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ gilt $\|f - g\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \geqslant 1$.

8.2. Beweise, dass

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla u(x)\right|^2 \mathrm{d}x - Z \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-1} \left|u(x)\right|^2 \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^3} \left|u(x)\right|^2 \mathrm{d}x} > -\infty$$

für alle $Z \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Betrachte die Funktion $x \mapsto |x|^{-1}$ als Summe zweier Funktionen, eine von welchen einen kompakten Träger hat, und denke über die Sobolev-Ungleichung.

8.3. Beweise, dass für alle reellwertigen Funktionen $f, g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ die folgenden weiteren Funktionen in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ liegen:

(a) $x \mapsto \left|f(x)\right|$;

(b) $x \mapsto \max\left\{f(x), g(x)\right\}$.

Hinweis 1: Um (a) zu beweisen, kann das folgende Lemma ohne Beweis verwendet werden:

Lemma. Sei $h \in C^1(\mathbb{R})$ mit $h' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$-\int_{\mathbb{R}^n} h\big(u(x)\big) \nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} h'\big(u(x)\big) \nabla u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $u, \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Finde eine passende Folge von Funktionen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die die Annahmen von Lemma erfüllen und gegen $|\cdot|$ konvergieren.
Hinweis 2: Es ist möglich, (b) aus (a) zu folgern.

8.4 (Bonusaufgabe!). Beweise das Lemma aus Hinweis 1 der Aufgabe 8.3.

Besprechung: Am Montag, den 7. 1. 2019.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!