Übungsblatt 4

4.1. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Für $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $R > 0$ sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta_x u = 0$ auf

$$Z_R(x,t) := \big\{(y,s) : |x-y| < R, s \in (t-R^2, t)\big\}.$$

Beweise, dass es ein $C_{\alpha\, l} \in (0,\infty)$ unabhängig von (x,t,R,u) existiert, sodass

$$\sup\Big\{\big|\partial_t^l \partial_x^\alpha u(y,s)\big| : \ (y,s) \in \overline{Z_{R/2}(x,t)}\Big\} \leqslant C_{\alpha\, l} R^{-|\alpha|-2l-n-2} \int_{Z_R(x,t)} \big|u(y,s)\big| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

erfüllt ist, wobei

$$\partial_x^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

gilt.
Hinweis: Beginne mit dem Fall $R = 2$ und führe eine glatte Funktion $\tilde{u}$ ein, die mit u auf $Z_1(x,t)$ übereinstimmt, aber einen kompakten Träger in $Z_2(x,t)$ hat. Welche Gleichung löst $\tilde{u}$?

4.2. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ eine periodische Funktion, d.h., es existiert ein $L > 0$, sodass $f(x+L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

auf $\mathbb{R} \times [0,\infty)$. Beweise, dass es ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = M \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt. Beweise ferner, dass es ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|u(x,t) - M\big| \leqslant C t^{-1/2} \quad \text{für alle } t \in (0,\infty)$$

gilt.

4.3. Seien $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$, $Q \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $f \in C^0(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ mit $f(\tilde{x}, 0) = Q$ für alle $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Finde eine Formel für die Lösung $u \in C^2\big(\mathbb{R}_+^n \times (0,\infty)\big) \cap C^0\big(\overline{\mathbb{R}_+^n} \times [0,\infty)\big)$ des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}_+^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{für alle } x \in \overline{\mathbb{R}_+^n} \\ u(\tilde{x},0,t) = Q & \text{für alle } \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ und } t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Besprechung: Am Montag, den 19. 11. 2018.