Mathematisches Institut der LMU
Prof. M. Napiórkowski
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2018/19
6. 11. 2018

Übungsblatt 3

3.1. Für $R > 0$ sei $H \in C^2\big([0,\infty)\big)$ mit $H'(0) = 0$ und $\operatorname{supp} H = [0, R]$.
Sei $u \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = H\big(|x|\big) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3,\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

Sei ferner $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $|x_0| > R$.

(a) Berechne $\inf \big\{ t \geqslant 0 : u(x_0, t) \neq 0 \big\}$.

(b) Berechne die Asymptotik von $u(x_0, t)$ für große $t > 0$.

3.2. Seien $n \in \mathbb{N} + 1$, $c > 0$, Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und ν das äußere Normalfeld zu $\partial\Omega$. Seien $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$ und $h \in C\big(\overline{\Omega} \times [0,t)\big)$. Beweise, dass die Lösung $u \in C^2\big(\overline{\Omega} \times [0,t)\big)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = h(x,t) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ \partial_\nu u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\infty) \end{cases} \tag{2}$$

eindeutig ist.
Hinweis: Die Existenz einer Lösung muss in dieser Aufgabe nicht bewiesen werden.

3.3. Seien $L, M > 0$ und $f, g \in C_0^2\big((0,L) \times (0,M)\big)$. Beweise, dass

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} &\cos\left(\frac{\pi n x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m x_2}{M}\right) \\ &\times \left(\alpha_{nm} \sin\left(\pi c t \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{M^2}}\right) + \beta_{nm} \cos\left(\pi c t \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{M^2}}\right) \right) \end{aligned} \tag{3}$$

für eine passende Wahl der Konstanten α_{nm}, β_{nm} eine Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0,L] \times [0,M],\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0,L) \times (0,M) \\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in (0,L) \times (0,M) \\ u(x_1, 0, t) = u(x_1, M, t) = 0 \quad \text{für alle } (x_1, t) \in [0,L] \times [0,\infty) \\ u_{x_1}(0, x_2, t) = u_{x_1}(L, x_2, t) = 0 \quad \text{für alle } (x_2, t) \in [0,M] \times [0,\infty) \end{cases} \tag{4}$$

liefert.

Besprechung: Am Montag, den 12. 11. 2018.