Mathematisches Institut der LMU
Prof. M. Napiórkowski
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2018/19
22. 1. 2019

Übungsblatt 11

11.1. Beweise, dass die Behauptung von Satz 6.17 (Rellich-Kondrachov) in den folgenden Situationen nicht gelten kann:

(a) Ω beinhaltet unendlich viele disjunkten Kugeln fester Größe, d.h., es existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}^n$, sodass $|x_n - x_k| \geqslant 2\varepsilon$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon) \subset \Omega$ gilt.

(b) $q = p^*$.

11.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen; $k \in C^1(\overline{\Omega})$, es existiert $k_0 > 0$ mit $k(x) \geqslant k_0$ für alle $x \in \Omega$. Beweise, dass für jede offene Teilmenge Ω' von Ω die Ungleichung

$$\inf_{v\in W_0^{1,2}(\Omega')} \int_{\Omega'} k(x)\big|(\nabla v)(x)\big|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \inf_{v\in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} k(x)\big|(\nabla v)(x)\big|^2\,\mathrm{d}x$$

gilt.

11.3. Es sei bekannt, dass ein $u \in W^{1,2}\big((-1,1)\big) \cap C^2\big([-1,0) \cap (0,1]\big)$ existiert, sodass

$$E(u) = \inf_{v\in W^{1,2}((-1,1))} E(v), \quad E(v) := \int_{-1}^{1} \Big(\big|v'(x)\big|^2 + \big|v(x)\big|^2\Big)\mathrm{d}x - 2v(0)$$

gilt. Finde u und $E(u)$.

Besprechung: Am Montag, den 28. 1. 2019.