Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
19. 12. 2017

Übungsblatt 9

9.1. Finden Sie eine Funktion $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die nicht exponentiell abfällt, d.h., für alle $a > 0$ gilt $\mathrm{e}^{a|x|^a} u \notin L^\infty(\mathbb{R})$.

9.2. Beweisen Sie:

(a) Sei $M \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Falls es für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Zahlen $N \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ existieren, sodass

$$\big|(\partial^\alpha M)(x)\big| \leqslant c\big(1 + |x|\big)^N \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt, dann ist $f \mapsto Mf$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Falls es zusätzlich $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ existieren, sodass

$$\big|M(x)\big| \geqslant c\big(1 + |x|\big)^{-k} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt, dann ist die Abbildung $f \mapsto Mf$ bijektiv und die Umkehrabbildung ist stetig.

9.3. Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass falls es eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gibt, die auf $\partial\Omega$ verschwindet und dem Quotienten

$$\frac{\int_\Omega \big|(\nabla u)(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x}{\int_\Omega \big|u(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x}$$

seinen minimalen Wert λ liefert, dann ist u eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert λ:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega.$$

9.4. Beweisen Sie, dass jede Funktion, die auf $\mathbb{R}^n$ harmonisch und beschränkt ist, auch konstant ist.

9.5. Für $r > 0$ sei u eine nichtnegative harmonische Funktion in $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $u \in C\big(\overline{B_r(0)}\big)$. Beweisen Sie die Ungleichungen

$$\frac{r^{n-2}\big(r - |x|\big)}{\big(r + |x|\big)^{n-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{r^{n-2}\big(r + |x|\big)}{\big(r - |x|\big)^{n-1}} u(0) \quad \text{für alle } |x| < r.$$

Besprechung: Am Montag, den 8. 01. 2018 und Donnerstag, den 11. 01. 2018.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!