Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
11. 12. 2017

Übungsblatt 8

8.1. Für $a > 0$ sei

$$H(x,\xi) := \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |\xi|^2}{|x-\xi|^n}$$

der Poisson-Kern für die Laplace-Gleichung in $B_a(0) \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass für jedes f auf $\partial B_a(0)$ die Funktion

$$u(\xi) := \int_{\partial B_a(0)} H(x,\xi) f(x) \, \mathrm{d}S(x)$$

beliebig oft differenzierbar in $B_a(0)$ ist.

8.2. Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die gleichmäßig gegen $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass u eine harmonische Funktion ist.

8.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit der Eigenschaft, dass für jedes $\eta \in \partial\Omega$ existiert ein Ball B in $\mathbb{R}^n$, sodass $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{\eta\}$. Beweisen Sie, dass Ω die Barriereeigenschaft hat, d.h., für jedes $\eta \in \partial\Omega$ existiert eine subharmonische "Barrierefunktion" $Q_\eta \in C^0(\overline{\Omega})$, sodass

$$Q_\eta(\eta) = 0, \qquad Q_\eta(x) < 0 \text{ für alle } x \in \partial\Omega \setminus \{\eta\}$$

gilt.

Besprechung: Am Montag, den 18. 12. 2017.