Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
4. 12. 2017

Übungsblatt 7

7.1. Sei u eine harmonische Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand $\partial\Omega$.

(a) Beweisen Sie die Existenz einer *konjugiert harmonischen* Funktion v in Ω, die die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

erfüllt.

(b) Beweisen Sie, dass auf $\partial\Omega$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

gilt, wobei n der äußere Normaleneinheitsvektor und s der Tangentialvektor im Gegenuhrzeigersinn zu $\partial\Omega$ sind.

(c) Finden Sie, wie das Neumann-Problem für $\Delta u = 0$ in das Dirichlet-Problem für $\Delta v = 0$ (und umgekehrt) umgewandelt werden kann.

7.2. Sei das Newton-Potential einer Dichte $\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)$ durch

$$V_\rho(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} \mathrm{d}y$$

gegeben.

(a) Beweisen Sie, falls ρ einen kompakten Träger hat und $M := \int \rho(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ gilt, die asymptotische Formel

$$V_\rho(x) = M|x-z|^{-1} + o\big(|x-z|^{-1}\big)$$

für große $|x|$, wobei

$$z := \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} x\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

der *Massenmittelpunkt* von ρ ist.

(b) Bestimmen Sie $V_{1_{B_R(0)}}$ für $R > 0$.

7.3. Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und a, b, c, d, e stetige Funktionen auf $\overline{\Omega}$ mit $ac - b^2 > 0$, $a > 0$. Beweisen Sie, dass für jede Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ der Differentialgleichung

$$Lu := au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y = 0$$

das Maximumprinzip

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

gilt.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst das Maximumprinzip für die Lösungen von $Lu > 0$. Zeigen Sie dafür, dass in jedem Maximumpunkt in Ω die Ungleichungen

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \geqslant 0, \quad u_{xx} \leqslant 0, \quad u_{yy} \leqslant 0$$

gelten müssen. Dann betrachten Sie für $\varepsilon, M > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ die Funktion

$$u + \varepsilon v \qquad \text{mit} \qquad v(x,y) := \exp\Big(M\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big)\Big).$$

Besprechung: Am Montag, den 11. 12. 2017.