Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
20. 11. 2017

Übungsblatt 5

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \\ u(0,t) = \alpha(t), \\ u(\pi,t) = \beta(t). \end{cases} \tag{1}$$

auf dem Intervall $[0,\pi]$ mit $f \in C^2\big([0,\pi]\big)$, $g \in C^1\big([0,\pi]\big)$, α, $\beta \in C^2\big([0,\infty)\big)$ und $c > 0$ eine Konstante.

5.1. Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, damit eine Lösung $u \in C^2\big([0,\pi]\times[0,\infty)\big)$ existiert?

5.2. Seien $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ für alle $t \geqslant 0$. Der Fourierreihenansatz für die Lösung wird in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(nx) \tag{2}$$

gesucht.

(a) Warum wird nicht die "klassische" Fourier-Reihe auf $(0,\pi)$ mit unbekannten Koeffizienten

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n(t)\sin(2nx) + c_n(t)\cos(2nx)\Big) \tag{3}$$

als Ansatz verwendet?

(b) Sei nun $t = 0$. Über die Fourier-Reihen der Form (3) ist bekannt, dass für die Wahl

$$b_n(0) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x, \quad c_n(0) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gilt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n(0)\sin(2nx) + c_n(0)\cos(2nx)\Big),$$

wobei die Konvergenz der Reihe im Sinne von $L^2\big((0,\pi)\big)$ (für $f(0) = f(\pi)$, auch gleichmäßig auf $[0,\pi]$) gilt. Beweisen Sie eine ähnliche Aussage für die Reihe (2).

5.3. Finden Sie die Lösung u des Anfangsrandwertproblems (1) mit $c = 1$, $f = g = 0$ auf $[0,\pi]$,

$$\alpha(t) = 1 - \cos t, \quad \beta(t) = 0 \quad \text{für alle } t \geqslant 0.$$

Besprechung: Am Montag, den 27. 11. 2017.