Übungsblatt 4

4.1 (Hodographtransformation)**.** Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der quasilinearen Gleichung

$$a(u_x, u_y)u_{xx} + 2b(u_x, u_y)u_{xy} + c(u_x, u_y)u_{yy} = 0.$$

Seien

$$\xi(x, y) := u_x(x, y), \quad \eta(x, y) := u_y(x, y), \quad \phi(x, y) := xu_x(x, y) + yu_y(x, y) - u(x, y).$$

Beweisen Sie, dass in den neuen Variablen (ξ, η) gilt

$$x = \phi_\xi, \quad y = \phi_\eta$$

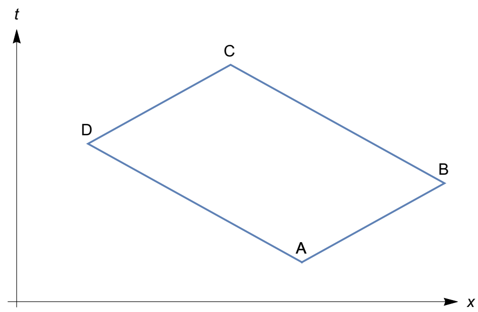
und

$$a(\xi, \eta)\phi_{\eta\eta} - 2b(\xi, \eta)\phi_{\xi\eta} + c(\xi, \eta)\phi_{\xi\xi} = 0,$$

d.h., die Gleichung für ϕ wird linear. Wie können wir anhand ϕ die Funktion u wiederherstellen?

Im Weiteren ist $c > 0$ eine Konstante.

4.2.



Sei u eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Beweisen Sie, dass für jedes Parallelogramm $ABCD$ in der (x, t)–Ebene mit der Steigung der Seiten $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm c$ (siehe Skizze) gilt

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$

4.3. Seien $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ Funktionen mit kompakten Träger.

(a) Beweisen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$u(\cdot, t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ einen kompakten Träger hat.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktionen F und G aus der Darstellung

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

nur dann kompakten Träger haben können, wenn die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

erfüllt ist.

Besprechung: Am Montag, den 20. 11. 2017.