Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
06. 11. 2017

Übungsblatt 3

3.1. Für konstantes $c > 0$ betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$u_x^2 + u_y^2 = c^{-2}$$

mit einer Anfangskurve

$$\Gamma: \quad x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s).$$

(a) Beweisen Sie, dass es keine reelle Lösung u durch Γ existiert, falls $c^2(h')^2 > (f')^2 + (g')^2$ gilt.

(b) Finden Sie alle Lösungen des Anfanswertsproblems mit

$$f(s) := \cos s, \quad g(s) := \sin s, \quad h(s) := 0, \quad s \in [0, 2\pi).$$

3.2. Sei $H(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n)$ eine vorgegebene Funktion. Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$F = \frac{\partial u}{\partial t} + H\Big(x_1, \dots, x_n, t, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0$$

(Hamilton–Jacobi–Gleichung) für $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$. Leiten Sie die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}, \quad \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{p_i} - H, \quad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i} \tag{1}$$

her.

Wir führen jetzt die Funktionen $v_i := dx_i/dt$ und $L := du/dt$ ein und verwenden die ersten $n+1$ Gleichungen in (1), um p_i und L als Funktionen von $x_1, \dots, x_n, t, v_1, \dots, v_n$ auszudrücken. Zeigen Sie, dass dann die Gleichungen

$$L_{v_i} = p_i, \quad L_{x_i} = -H_{x_i} \tag{2}$$

erfüllt sind. Zeigen Sie ferner, dass

$$\frac{d}{dt} L_{v_i} - L_{x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Das sind die Euler–Lagrange–Gleichungen für die stationären Funktionen des Funktionals (Wirkungsfunktional)

$$\int L(x_1, \dots, x_n, t, dx_1/dt, \dots, dx_n/dt) dt.$$

3.3. (a) Beweisen Sie, dass die allgemeine Lösung der Gleichung

$$u_{xy} = 0$$

durch $u(x, y) = F(x) + G(y)$ gegeben ist, wobei F und G zwei beliebigen Funktionen sind.

(b) Für $\theta \in [0, \pi)$ sei γ eine Gerade gegeben durch $\gamma(s) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta)$, $s \in \mathbb{R}$. Seien ferner h, ϕ, ψ glatte Funktionen auf $\mathbb{R}$. Welche Bedingungen müssen θ, h, ϕ, ψ erfüllen, damit das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_{xy} = 0, \\ (u, u_x, u_y)\big(\gamma(s)\big) = (h, \phi, \psi)(s) \end{cases}$$

eindeutig lösbar wird?

Besprechung: Am Montag, den 13. 11. 2017.