Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
15. 01. 2018

Übungsblatt 10

Sei $d \in \mathbb{N}$.

10.1. Seien f und g zwei Funktionen aus dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $g(0) = 1$. Sei ferner $h_\varepsilon(x) := g(\varepsilon x) f(x)$ für $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass $h_\varepsilon \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

10.2. Seien $x_0, p_0 \in \mathbb{R}$ und $s > 0$. Wir definieren den kohärenten Zustand K durch

$$K(x) = K_{x_0,p_0,s}(x) := C_s \mathrm{e}^{ip_0 x} \exp\Big(- \frac{(x - x_0)^2}{2s^2} \Big).$$

(a) Finden Sie C_s so, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \big| K(x) \big|^2 \,\mathrm{d}x = 1 \tag{1}$$

gilt.

(b) Finden Sie die Fourier-Transformation $\hat{K} = \mathcal{F}K$ von K.

(c) Ein Spezialfall der Heisenbergschen Unschärferelation lautet: Für jede Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} \big| g(x) \big|^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

gilt die Ungleichung

$$V\big(|g|^2\big) V\big(|\hat{g}|^2\big) \geqslant 1/4. \tag{2}$$

Hier ist V die Varianz, d. h.

$$V(f) := \int_{\mathbb{R}} (x - \overline{x}_f)^2 f(x) \,\mathrm{d}x, \quad \overline{x}_f := \int_{\mathbb{R}} x f(x) \,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Die linke Seite von (2) heißt die quantenmechanische Unschärfe des Zustandes g.

Zeigen Sie, dass kohärente Zustände die Unschärfe minimieren. D.h. für alle Parameter (x_0, p_0, s) und $g := K$ gilt Gleichheit in (2).

10.3. Beweisen Sie, dass die lineare Hülle von Skalierungen und Translationen der Funktion $f : x \mapsto \exp\big(- |x|^2/2 \big)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ liegt. Folgern Sie daraus einen alternativen Beweis der Rücktransformationsformel für die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Hinweis: Betrachten Sie

$$\varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \exp\Big(- \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon^2} \Big) \,\mathrm{d}y$$

für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Besprechung: Am Montag, den 22. 01. 2018.