Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
23. 10. 2017

Übungsblatt 1

1.1. Seien a, b, c C^1-Funktionen auf einer Umgebung von $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Sei $\Gamma = (f, g, h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Anfangskurve mit $\Gamma(s_0) = P_0$ und
$x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$, $z = Z(s,t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x_t = a(x, y, z), \quad x(s, 0) = f(s); \tag{1}$$
$$y_t = b(x, y, z), \quad y(s, 0) = g(s); \tag{2}$$
$$z_t = c(x, y, z), \quad z(s, 0) = h(s). \tag{3}$$

Ferner sei die Abbildung $(s,t) \mapsto \big(X(s,t), Y(s,t)\big)$ umkehrbar mit der differenzierbaren Umkehrabbildung $s = S(x, y)$, $t = T(x, y)$.
Beweisen Sie, dass $u(x, y) := Z\big(S(x, y), T(x, y)\big)$ die partielle Differentialgleichung

$$au_x + bu_y = c$$

löst.

1.2. Lösen Sie die Anfangswertprobleme und überprüfen Sie Ihre Lösungen:

(a) $u_x + u_y = u^2, \quad u(x, 0) = h(x)$;

(b) $u_y = xuu_x, \quad u(x, 0) = x$ (Die Antwort ist die implizite Lösung $x = u\mathrm{e}^{-yu}$);

(c) $xu_x + yu_y + u_z = u, \quad u(x, y, 0) = h(x, y)$;

(d) $xu_y - yu_x = u, \quad u(x, 0) = h(x)$ (Antwort: $u = h(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{e}^{\arctan(y/x)}$).

1.3. Beweisen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_y + a(u)u_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x)$$

implizit durch

$$u = h\big(x - a(u)y\big)$$

gegeben ist. Beweisen Sie, dass die Lösung für ein $y > 0$ singulär wird, es sei denn, die Funktion $s \mapsto a\big(h(s)\big)$ ist nicht fallend.

Besprechung: Am Montag, den 30. 10. 2017.