Analysis für Informatiker und Statistiker
LMU München
Winteresmester 2016/17

Sergey Morozov

7. Februar 2017

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Axiom 1.1. Eine (mathematische) *Aussage* $\mathcal{A}$ ist die Schilderung eines Sachverhalts, welchem entweder der Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zukommt (Bivalenzprinzip, zweiwertige Logik).

Definition 1.2. Sei $\mathcal{A}$ eine Aussage. Durch $\mathcal{B} :\Leftrightarrow \mathcal{A}$ wird die Aussage $\mathcal{B}$ eingeführt, die zu $\mathcal{A}$ *per Definition* identisch ist. So können wir, insbesondere, neue Begriffe einführen.

Beispiel 1.3.

1. $\mathcal{A}_1 :\Leftrightarrow$ "Nach Dienstag kommt Mittwoch" (w);
2. $\mathcal{A}_2 :\Leftrightarrow$ "Alle Menschen sind blond" (f);
3. $\mathcal{A}_3 :\Leftrightarrow$ "Dieser Satz ist falsch" (Keine Aussage, Lügner-Paradox).

Definition 1.4 (Verneinung, Negation)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine Aussage. Das Gegenteil von $\mathcal{A}$, $\neg\mathcal{A}$ ("nicht $\mathcal{A}$") definieren wir durch die Wahrheitstabelle:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
w	f
f	w

Sprechweise: $\neg\mathcal{A} =$ "Es ist nicht richtig, dass $\mathcal{A}$ gilt".

Durch Verknüpfungen (Junktoren) können wir aus 2 Aussagen eine neue Aussage bilden:

Definition 1.5. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Aussagen. Wir führen

1. *"und"-Verknüpfung, Konjunktion:* $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$;
2. *"oder"-Verknüpfung, Disjunktion:* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
3. Implikation: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Leftarrow \mathcal{A}$, "$\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$", "$\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$", "wenn $\mathcal{A}$ wahr ist, dann ist auch $\mathcal{B}$ wahr";
4. Äquivalenz: $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, "$\mathcal{A}$ ist notwendig und hinreichend für $\mathcal{B}$", "$\mathcal{A}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{B}$ wahr ist"

folgendermaßen ein:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Bemerkung 1.6. Für jede Aussage $\mathcal{A}$ gilt:

1. Ausgeschlossener Widerspruch: $\big(\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A})\big) \Leftrightarrow f$.
2. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten: $\big(\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{A})\big) \Leftrightarrow w$.
3. Aus Falschem folgt Beliebiges: $(f \Rightarrow \mathcal{A}) \Leftrightarrow w$.

Beispiel 1.7. Im Beispiel 1.3 gilt:

1. $\neg\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow$ "Nach Dienstag kommt nicht Mittwoch" (f);
2. $\neg\mathcal{A}_2 \Leftrightarrow$"Es gibt Menschen, die nicht blond sind" (w);

Definition 1.8. Wenn nicht durch Klammerung eindeutig gemacht, gilt folgende Priorität der Verknüpfungen:

1. $\neg$ (Negation);
2. $\wedge$ (Konjunktion);
3. $\vee$ (Disjunktion);
4. $\Rightarrow$ (Implikation);
5. $\Leftrightarrow$ (Äquivalenz).

Beispiel 1.9. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Aussagen. Die Aussage

$$(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Leftrightarrow \Big(\big(\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{B})\big) \Rightarrow \mathcal{C}\Big)$$

ist immer wahr, aber die Aussage

$$(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{A} \wedge \big(\neg(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big)\Big)$$

ist falsch für $\mathcal{A} \Leftrightarrow w$.

Bemerkung 1.10. Die Aussagen, die andere Aussagen als Parametern enthalten, aber für alle Werte von denen wahr sind (so ist die erste Aussage in Beispiel 1.9, aber nicht die zweite) heißen *Tautologien* oder *allgemein gültigen* Aussagen.

Bemerkung 1.11. Alles was im weiteren als Satz oder Lemma bezeichnet wird, ist aus logischer Sicht eine allgemein gültige Aussage. Der Prozess, der die Wahrheit einer solchen Aussage nachweist, heißt Beweis. Im Allgemeinen können aber nicht alle allgemein gültigen Aussagen mit logischen Mitteln (durch sogenannten *Schlussregeln*) bewiesen werden!

Lemma 1.12. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (beliebige) Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen immer wahr (tautologisch):

1. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ (Symmetrie von $\wedge$ und $\vee$);
2. $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})\big)$;
3. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (Kontraposition);
4. $\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$;
5. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) :\Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ (Assoziativität von $\wedge$);
   $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) :\Leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ (Assoziativität von $\vee$).

Beweis: Zu 3:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Der Rest ist analog: Übung! □

Beispiel 1.13 (Beweismethoden)**.** Sei die Aussage $\mathcal{A}$ wahr. Wir wollen beweisen, dass die Aussage $\mathcal{B}$ auch wahr ist. Es stehen (unter anderem) folgende Beweismethoden (*Schlussregeln*) zur Verfügung:

1. (direkt): Erkenne, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist.
2. (per Widerspruch): Erkenne, dass $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ wahr ist.
3. (per Widerspruch): Erkenne, dass $\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ falsch ist.

Satz 1.14 (Transitivität der Implikation und Äquivalenz)**.** Für alle Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sind die Aussagen

1. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$
2. $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$

immer wahr.

Beweis: Durch Wahrheitstabellen. $\square$

Definition 1.15. Durch $B := A$ wird Symbol B für Objekt A eingeführt.

Definition 1.16 (Quantoren)**.** Folgende Symbole werden im Weiteren oft verwendet:

$$\begin{aligned} \forall \; &:= \text{“für alle”}; \\ \exists \; &:= \text{“es existiert (mindestens) ein(e)”}; \\ \exists_1 \; &:= \text{“es existiert genau ein(e)”}; \\ : \; &:= \text{“gilt” bzw. “so dass”}. \end{aligned}$$

Definition 1.17. Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussage, die von einem Parameter x abhängt. Es gelten folgende Verneinungsregeln:

1. $\neg\big(\forall x : \mathcal{A}(x)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x : \neg\mathcal{A}(x)\big)$;
2. $\neg\big(\exists x : \mathcal{A}(x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x : \neg\mathcal{A}(x)\big)$;

Übung 1.18. Sei $\mathcal{A}(x, y)$ eine Aussage, die von zwei Parametern x und y abhängt.

1. Verneinen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $\forall x \; \exists y : \mathcal{A}(x, y)$;
   (b) $\exists x \; \forall y : \mathcal{A}(x, y)$.
2. Welche der zwei Aussagen
   $$\mathcal{B} :\Leftrightarrow \big(\forall x \; \exists y : \mathcal{A}(x, y)\big) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} :\Leftrightarrow \big(\exists y \; \forall x : \mathcal{A}(x, y)\big)$$
   impliziert die andere?

1.2 Mengen, Relationen, Funktionen

Axiom 1.19 ("Naives Axiom" von Cantor)**.** Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (Reihenfolge irrelevant!).

Definition 1.20. Seien M, M' Mengen.

1. *Element sein*: $x \in M \; :\Leftrightarrow$ Objekt x liegt in Menge M.
   Verneinung: $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

2. *Teilmenge*:
   $M' \subset M \; :\Leftrightarrow M'$ ist eine Teilmenge von $M \; :\Leftrightarrow \forall x \in M' : x \in M$.
   Verneinung: $M' \not\subset M \; :\Leftrightarrow \neg(M' \subset M)$.
   Obermenge: $M \supset M' \; :\Leftrightarrow M' \subset M$.

3. *Gleichheit von Mengen*: $M = M' \; :\Leftrightarrow (M \subset M') \wedge (M' \subset M)$;

4. *Ungleichheit von Mengen*: $M \neq M' \; :\Leftrightarrow \neg(M = M')$;

5. *Echte Teilmenge*: $M' \subsetneq M \; :\Leftrightarrow (M' \subset M) \wedge (M \neq M')$.

Übung 1.21. Seien M, M' Mengen. Beweise Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

1. $M' \subsetneq M$;

2. $(M' \subset M) \wedge (M \not\subset M')$;

3. $(M' \subset M) \wedge (\exists x \in M : x \notin M')$.

Beispiel 1.22. Betrachte die Menge der lateinischen Buchstaben

$$L := \{a, b, \dots, z, A, B, \dots, Z\}$$

(die rechte Seite gibt eine "aufzählende" Bezeichnung der Menge an). Die Menge der lateinischen Buchstaben im Wort "Mathematik" ist

$$M := \{a, M, t, h, e, m, i, k\} = \big\{x \in L : \mathcal{A}(x)\big\},$$

mit der Aussage

$$\mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow \text{Buchstabe } x \text{ kommt in "Mathematik" vor.}$$

Definition 1.23. Seien M, N Mengen. Wir definieren:

1. *Leere Menge:* $\varnothing :=$ Menge, die keine Elemente enthält;

2. *Schnitt:* $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$;

3. *Vereinigung:* $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$;

4. *Differenz:* $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}$;

5. Wird M als *Universum* betrachtet (d.h. es kommen nur Teilmengen von M in gewissem Kontext infrage), so wird $N^c := M \setminus N$ *Komplement* von N in M genannt;

6. *Kartesisches Produkt:* $M \times N := \big\{(m,n) : m \in M \wedge n \in N\big\}$ ist die Menge aller *geordneten* (d.h. die Reihenfolge ist wichtig!) Paare. Insbesondere, für $M \neq N$ gilt $M \times N \neq N \times M$.

7. *Potenzmenge* von M: $2^M := \mathscr{P}(M) := \{L \text{ Menge} : L \subset M\}$.

Beispiel 1.24.

1. $\forall$ Mengen M gilt: $\varnothing \subset M$.
   Beweis: *Die Aussage* $\forall x \in \varnothing : x \in M$ *ist immer wahr.* $\square$

2. $\forall$ Mengen M gilt: $\varnothing \neq \mathscr{P}(M) \supset \{\varnothing, M\}$.

3. $\{a,b,c\} \times \{a,d\} = \big\{(a,a),(a,d),(b,a),(b,d),(c,a),(c,d)\big\}$.

4. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$; $\mathscr{P}\big(\{a\}\big) = \big\{\varnothing, \{a\}\big\}$.

Lemma 1.25 (Rechenregeln für $\cup$ and $\cap$)**.** Seien L, M, N Mengen. Es gelten

1. *Kommutativität:* $M \cap N = N \cap M$; $M \cup N = N \cup M$;

2. *Assoziativität:* $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N =: L \cap M \cap N$;
   $L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N =: L \cup M \cup N$;

3. *Idempotenz:* $M \cap M = M = M \cup M$;

4. *Distributivität:* $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$;
   $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$;

5. *de Morgan-Regeln:* Sei M *Universum*, seien $L, N \subset M$. Dann gelten $(L \cap N)^c = L^c \cup N^c$ und $(L \cup N)^c = L^c \cap N^c$.

Beweis: Wir können alle Aussagen des Lemmas aus den entsprechenden Regeln für die Junktoren $\vee, \wedge, \neg$ und Definition 1.23 herleiten. Zum Beispiel, die 1. de Morgan-Regel: Es gilt

$$\begin{aligned} \neg(x \in L \cap N) &\overset{\text{Def. 1.23.2}}{\iff} \neg(x \in L \wedge x \in N) \\ &\overset{\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\Leftrightarrow\neg\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{B}}{\iff} x \notin L \vee x \notin N \\ &\overset{\text{Def. 1.23.5}}{\iff} x \in L^c \vee x \in N^c. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} (L \cap N)^c &\overset{\text{Def. 1.23.5}}{=} \{x \in M : \neg(x \in L \cap N)\} \\ &\overset{(1.1)}{=} \{x \in M : x \in L^c \vee x \in N^c\} \overset{\text{Def. 1.23.3}}{=} L^c \cup N^c. \end{aligned}$$

Der Beweis der restlichen Aussagen des Lemmas ist eine gute Übung. □

Definition 1.26. Seien L, M Mengen, $l \in L$, $m \in M$.

1. $\mathcal{R}$ ist eine *Relation* auf L, M $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{R} \subset L \times M$.
2. l und m erfüllen $\mathcal{R}$ $:\Leftrightarrow$ $l\mathcal{R}m$ $:\Leftrightarrow$ $(l,m) \in \mathcal{R}$.
3. *Inverse Relation* zu $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}^{-1} := \{(m,l) \in M \times L : (l,m) \in \mathcal{R}\}$.

Beispiel 1.27. Seien $L := M := \{a,b,c\}$. Die Relation "kommt früher im Alphabet als" ist durch

$$\mathcal{R} := \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

gegeben. Dann ist $\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a),(c,a),(c,b)\}$ die Relation "kommt später im Alphabet als".

Definition 1.28. Sei M Menge und $\preceq$ eine Relation auf M (d.h. auf M, M).

1. $\preceq$ heißt Ordnungsrelation $:\Leftrightarrow$ es gelten
   (a) Reflexivität:
   $$\forall m \in M : m \preceq m;$$
   (b) Transitivität:
   $$\forall m_1, m_2, m_3 \in M : (m_1 \preceq m_2) \wedge (m_2 \preceq m_3) \Rightarrow m_1 \preceq m_3;$$
   (c) Antisymmetrie:
   $$\forall m_1, m_2 \in M : (m_1 \preceq m_2) \wedge (m_2 \preceq m_1) \Rightarrow m_1 = m_2.$$

Dann heißt $(M, \leq)$ *teilweise geordnete* Menge.

2. Eine teilweise geordnete Menge heißt (*vollständig* oder *total*) *geordnet*, wenn zudem gilt:

$$\forall m_1, m_2 \in M : (m_1 \leq m_2) \vee (m_2 \leq m_1),$$

d.h. zwei beliebigen Elemente sind stets vergleichbar.

Beispiel 1.29. Sei M Menge.

1. $\big(\mathscr{P}(M), \subset\big)$ ist teilweise geordnet, aber nicht vollständig.
2. $\subsetneq$ ist keine Ordnungsrelation auf $\mathscr{P}(M)$.
3. Später kommt: $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ist vollständig geordnet.
4. Im Beispiel 1.27 haben wir keine Ordnungsrelation definiert, aber "steht früher oder an der gleichen Stelle im Alphabet als" wäre eine. (Geben Sie sie explizit an!)

Definition 1.30. Sei M Menge und $\sim$ eine Relation auf M.

1. $\sim$ heißt Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$ es gelten

   (a) Reflexivität:
   $$\forall m \in M : m \sim m;$$

   (b) Transitivität:
   $$\forall m_1, m_2, m_3 \in M : (m_1 \sim m_2) \wedge (m_2 \sim m_3) \Rightarrow m_1 \sim m_3;$$

   (c) Symmetrie:
   $$\forall m_1, m_2 \in M : (m_1 \sim m_2) \Leftrightarrow (m_2 \sim m_1).$$

2. Sei $m \in M$. Die *Äquivalenzklasse* von m (bezüglich $\sim$) ist

   $$[m] := \{m' \in M : m' \sim m\} \subset M.$$

   Es gilt immer $[m] \neq \varnothing$, da wegen Reflexivität $m \in [m]$ gilt.

3. $m' \in M$ ist ein *Repräsentant* von $[m]$ $:\Leftrightarrow m' \in [m]$.
4. $(M/\sim) := \big\{[m] : m \in M\big\}$ heißt *Quotientenmenge* von M.

Beispiel 1.31.

1. Gleichheit von Elementen ist eine Äquivalenzrelation:

$$= := \{(m,m) : m \in M\} \subset M \times M;$$

$$\forall m \in M : [m] = \{m\};$$
$$(M/=) = \{\{m\} : m \in M\}.$$

2. Sei $M := \{a,b,c,d\}$. $\sim$:="hat selbe Anzahl von Elementen wie" ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{P}(M)$. $\forall L \subset M$ gilt

$$[L] = \{L' \subset M : L' \text{ hat gleich viele Elemente wie } L\}.$$

Lemma 1.32. Sei M Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $m_1, m_2 \in M$. Dann gilt entweder $[m_1] = [m_2] \Leftrightarrow (m_1 \sim m_2)$ oder $[m_1] \cap [m_2] = \varnothing \Leftrightarrow m_1 \not\sim m_2 :\Leftrightarrow \neg(m_1 \sim m_2)$.

Beweis:

(i) $[m_1] = [m_2] \ni m_2 \Rightarrow m_2 \in [m_1] \Rightarrow m_2 \sim m_1$.

(ii) Gelte $m_1 \sim m_2$.
Sei $m_1' \in [m_1] \Rightarrow m_1' \sim m_1 \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} m_1' \sim m_2 \Rightarrow m_1' \in [m_2] \Rightarrow [m_1] \subset [m_2]$. Vertauschen wir 1 und 2, so folgt $[m_2] \subset [m_1]$. Folglich gilt $[m_1] = [m_2]$.
D.h. $m_1 \sim m_2 \Rightarrow [m_1] = [m_2]$.

(i) $\wedge$ (ii) $\Leftrightarrow (m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow [m_1] = [m_2])$ (Siehe Lemma 1.12.2).

(iii) Sei $m \in [m_1] \cap [m_2] \Rightarrow (m_1 \sim m) \wedge (m \sim m_2) \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} m_1 \sim m_2$. D.h. $m_1 \not\sim m_2 \Rightarrow [m_1] \cap [m_2] = \varnothing$ (Siehe Lemma 1.12.3).

(iv) Da stets $[m] \neq \varnothing$, gilt $[m_1] \cap [m_2] = \varnothing \Rightarrow [m_1] \neq [m_2]$. Negation von (ii) ergibt $[m_1] \neq [m_2] \Rightarrow m_1 \not\sim m_2$. Also gilt $[m_1] \cap [m_2] = \varnothing \Rightarrow m_1 \not\sim m_2$.

(iii) $\wedge$ (iv) $\Leftrightarrow m_1 \not\sim m_2 \Leftrightarrow [m_1] \cap [m_2] = \varnothing$. □

Definition 1.33 (Beliebige Vereinigungen und Schnitte)**.** Sei $J \neq \varnothing$ eine Menge ("Indexmenge") und $\forall j \in J$ sei M_j eine Menge.

1. $\bigcup\limits_{j \in J} M_j := \{m : \exists j \in J \text{ mit } m \in M_j\}$.

2. $\bigcap\limits_{j \in J} M_j := \{m : \forall j \in J \text{ gilt } m \in M_j\}$.

3. *Disjunkte Vereinigung*: Die Menge von Mengen $\{M_j : j \in J\}$ heißt *paarweise disjunkt* $:\Leftrightarrow \forall j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ gilt $M_j \cap M_{j'} = \varnothing$.
   In diesem Fall schreiben wir $\dot{\bigcup\limits_{j\in J}} M_j := \bigcup\limits_{j\in J} M_j$.

Korollar 1.34 (zu Lemma 1.32)**.** Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf Menge M. Dann gilt die disjunkte Zerlegung in Äquivalenzklassen: $M = \dot{\bigcup\limits_{[m]\in M/\sim}} [m]$.

Definition 1.35 (Funktion)**.** Seien X, Y Mengen.

1. f ist eine *Funktion/Abbildung* von X nach Y $:\Leftrightarrow$ f ist eine Regel, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet.
   Schreibweise: $f : X \to Y$, $f : x \mapsto y$.

2. Seien f, g zwei Funktionen von X nach Y. Wir definieren:

   (a) $\forall x \in X: \ f(x) := y$;

   (b) *Definitionsbereich von f:* $\mathscr{D}(f) := X$;

   (c) $\forall D \subset X$: *Bild von D unter f*:
   $f(D) := \big\{y \in Y : \exists x \in D \text{ mit } f(x) = y\big\}$;

   (d) *Wertebereich von* $f := f(X)$;

   (e) *Gleichheit von Funktionen:* $f = g \ :\Leftrightarrow \big(\forall x \in X: \ f(x) = g(x)\big)$.

Bemerkung 1.36. Die Gleichheit zweier Funktionen ist nach unsere Definition nur dann möglich, wenn ihre Definitionsbereiche gleich sind.

Definition 1.37. Sei $f : X \to Y$.

1. f ist *injektiv* $:\Leftrightarrow \ \forall y \in f(X) \ \exists_1 x \in X$ mit $y = f(x)$.

2. f ist *surjektiv* $:\Leftrightarrow \ f(X) = Y$.

3. f ist *bijektiv* $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\wedge$ f ist surjektiv.

Definition 1.38 (Umkehrfunktion)**.** Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann wegen Surjektivität und Injektivität $\forall y \in Y \ \exists_1 x \in X$ mit $f(x) = y$. Folglich ist die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : Y \to X$, $f^{-1} : y \mapsto x$ wohldefiniert.

Lemma 1.39. Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann ist die Funktion
$(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ wohldefiniert und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis: Übung. $\square$

Beispiel 1.40. Sei X Menge. Die *Identität auf* X, $\mathrm{id}_X : X \to X$, $\mathrm{id}_X : x \mapsto x$ ist eine bijektive Funktion. Es gilt $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$.

Definition 1.41 (*Komposition* oder *Verkettung* von Funktionen)**.**
Seien $f : X \to Y$, $g : \mathscr{D}(g) \to Z$ Funktionen mit $\mathscr{D}(g) \subset Y$. Dann ist $g \circ f$ die Funktion mit $\mathscr{D}(g \circ f) := \{x \in X : f(x) \in \mathscr{D}(g)\}$ und

$$g \circ f : \mathscr{D}(g \circ f) \to Z, \quad g \circ f : x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

Lemma 1.42. Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gilt

1. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$,
2. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Beweis:

1. Aus $f(X) = Y = \mathscr{D}(f^{-1})$ folgt $\mathscr{D}(f^{-1} \circ f) = X$. Ferner gilt $\forall x \in X$: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.
2. Analog.

□

Definition 1.43 (Urbild)**.** Seien M, X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Das Urbild von M unter f:

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : \exists y \in M \text{ mit } f(x) = y\}.$$

Bemerkung 1.44. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

1. Die Injektivität von f ist in Definition 1.43 nicht vorausgesetzt!
2. $M \cap f(X) = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(M) = \varnothing$.
3. f injektiv $\Rightarrow f : X \to f(X)$ bijektiv $\Rightarrow$ in der Gleichheit

   $$f^{-1}(M) = f^{-1}\big(M \cap f(X)\big)$$

   können wir die rechte Seite sowohl als Urbild im Sinne von Definition 1.43, als auch als Bild von f^{-1} im Sinne von Definition 1.38 betrachten!
4. Für alle $A \subset X$ gilt $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$. Ist f injektiv, so gilt $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2 Aufbau des Zahlensystems

2.1 Natürliche Zahlen

Menge $\mathbb{N}$, für die gelte

Axiom 2.1 (Axiomsystem von Peano)**.**

1. $\mathbb{N} \neq \varnothing$ ($\Rightarrow \exists$ mindestens ein Element in $\mathbb{N}$. Wir bezeichnen das als 1.);
   $\exists$ Funktion (*Nachfolgerabbildung*) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

2. $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ (1 ist kein Nachfolger);

3. ν ist injektiv (Eindeutigkeit des Vorgängers);

4. $\forall M \subset \mathbb{N}$ gilt:
   $$\big(1 \in M \wedge \nu(M) \subset M\big) \Rightarrow M = \mathbb{N}$$
   (Prinzip der vollständigen Induktion).

Definition 2.2. Wir definieren $2 := \nu(1)$, $3 := \nu(2)$, $\ldots$. Nach Axiom 2.1.4 werden so alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem Zahlensymbol erfasst.

Bemerkung 2.3. Die Axiome von Peano sind

1. vollständig: Alle bekannten Rechenregeln sind von denen ableitbar;

2. unabhängig: Keines der Axiome ist aus den anderen ableitbar;

3. widerspruchsfrei.

Definition 2.4. $\forall k, n \in \mathbb{N}$

1. *Addition (+):*
   $$n + 1 := \nu(n), \tag{2.1}$$
   $$n + \nu(k) := \nu(n + k); \tag{2.2}$$

2. *Multiplikation ($\cdot$):*
   $$n \cdot 1 := n, \tag{2.3}$$
   $$n \cdot \nu(k) := n \cdot k + n. \tag{2.4}$$

Bemerkung 2.5.

1. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ erklärt die rekursive Definition 2.4.1 wegen Axiom 2.1.4 $n + m$:

$$n + 2 = n + \nu(1) \overset{(2.2)}{=} \nu(n+1) \overset{(2.1)}{=} \nu\big(\nu(n)\big),$$
$$n + 3 = n + \nu(2) \overset{(2.2)}{=} \nu(n+2) \overset{\text{Zeile oben}}{=} \nu\Big(\nu\big(\nu(n)\big)\Big),$$
$$\vdots$$

2. Analog für $n \cdot m$.

3. Das Multiplikationssymbol $\cdot$ wird meist weggelassen.

Lemma 2.6 (Rechenregeln)**.** $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ sind die Addition und Multiplikation

1. assoziativ: $(k + m) + n = k + (m + n)$, $(km)n = k(mn)$;

2. kommutativ: $n + k = k + n$, $nk = kn$;

3. distributiv: $(k + m)n = kn + mn$.

Beweis: Assoziativität von "+": Übung!
Wir beweisen, dass "+" kommutativ ist (dabei wird die Assoziativität verwendet).

1. Zeige $\forall n \in \mathbb{N}:\ n + 1 = 1 + n$. Beweis per vollst. Induktion: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n + 1 = 1 + n\}$.

   (a) $1 \in M$ ist wahr ("Induktionsanfang").

   (b) Sei $n \in M$ ("Induktionsannahme"), z.z.: $n + 1 = \nu(n) \in M$ ("Induktionsschritt").

   $$\nu(n) + 1 \overset{(2.1)}{=} \nu\big(\nu(n)\big) \overset{n \in M}{=} \nu(1 + n) \overset{(2.2)}{=} 1 + \nu(n) \Rightarrow \nu(n) \in M.$$

   (a)$\wedge$(b)$\overset{2.1.4}{\Rightarrow} M = \mathbb{N}$.

2. Zeige $\forall n, k \in \mathbb{N}:\ n + k = k + n$. Sei $n \in \mathbb{N}$ fix. Beweis per Induktion nach k: Sei $K := \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } n + k = k + n\}$.

   (a) $1 \in K$ wegen Schritt 1.

   (b) Sei $k \in K$; z.z.: $\nu(k) = k + 1 \in K$.

   $$n + \nu(k) \overset{(2.2)}{=} \nu(n + k) \overset{k \in K}{=} \nu(k + n) \overset{(2.2)}{=} k + \nu(n) \overset{\text{1. Schritt}}{=} k + (1 + n)$$
   $$\overset{\text{+ assoz.}}{=} (k + 1) + n \overset{(2.1)}{=} \nu(k) + n \Rightarrow \nu(k) \in K.$$

(a)$\wedge$(b)$\overset{2.1.4}{\Rightarrow} M = \mathbb{N}$.

Für $\cdot$ alles analog. $\square$

Definition 2.7. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Relationen auf $\mathbb{N}$ (und ihre Inverse):

1. $n < m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k$;
2. $n > m :\Leftrightarrow m < n$;
3. $n \leqslant m :\Leftrightarrow n < m \vee n = m$;
4. $n \geqslant m :\Leftrightarrow m \leqslant n$.

Lemma 2.8. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} :\ 1 < n$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Laut Def. 2.2 $\exists k \in \mathbb{N} : n = \nu(k) = k + 1 = 1 + k \Rightarrow 1 < n$. $\square$

Lemma 2.9. $\forall k, n \in \mathbb{N} :\ n \neq n + k$.

Beweis: Induktion nach n:

1. $\forall k : 1 \neq 1 + k = \nu(k)$, da $1 \neq \nu(\mathbb{N})$.
2. Gelte $\forall k : n \neq n + k$, z.z. $\forall k : \nu(n) \neq \nu(n) + k$.
   Per Widerspruch: Sei $\exists k : \nu(n) = \nu(n) + k \overset{(2.2)}{=} \nu(n + k)$. Dann gilt laut Axiom 2.1.3 $n = n + k$, Widerspruch $\Rightarrow \forall k : \nu(n) \neq \nu(n) + k$.

Nach Axiom 2.1.4 folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.10. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ist genau eine der Aussagen

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m$$

wahr.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $V(n) := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$,
$N(n) := \{m \in \mathbb{N} : m > n\}$, und $M(n) := V(n) \cup \{n\} \cup N(n)$.

1. Zeige $M(n) = \mathbb{N}$.
   (a) *Induktionsanfang:* $1 \in M(n)$ gilt wegen $\{1\} \in M(1)$ oder Lemma 2.8.
   (b) *Induktionsschritt:* Sei $m \in M(n)$. Z.z.: $\nu(m) \in M(n)$.

i. Fall $m = n \Rightarrow \nu(m) = n + 1 > n \Rightarrow \nu(m) \in N(n)$.

ii. Fall $m \in N(n) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k \Rightarrow \nu(m) = \nu(n + k) \overset{(2.2)}{=} n + \nu(k) \Rightarrow \nu(m) \in N(n) \subset M(n)$.

iii. Fall $m \in V(n) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + k$.

A. Fall $k = 1 \Rightarrow \nu(m) = n \in M(n)$.

B. Fall $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : k = l + 1 \Rightarrow n = m + l + 1 = \nu(m) + l \Rightarrow \nu(m) \in V(n) \subset M(n)$.

2. Zeige $M = V(n) \dot\cup \{n\} \dot\cup N(n)$ (paarweise Disjunktheit).

(a) Z.z. $n \notin V(n)$:
Sei $m \in V(n) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + k \overset{\text{Lemma 2.9}}{\Rightarrow} m \neq n$.

(b) Z.z. $n \notin N(n)$: analog.

(c) Z.z. $V(n) \cap N(n) = \varnothing$: $\forall m_1 \in V(n)\ \exists k_1 \in \mathbb{N} : n = m_1 + k_1$; $\forall m_2 \in N(n)\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : m_2 = n + k_2 \Rightarrow m_2 = m_1 + k_1 + k_2 \overset{\text{Lemma 2.9}}{\Rightarrow} m_1 \neq m_2$.

□

Lemma 2.11 ("Kürzen"). $\forall k, n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $n = m \Leftrightarrow n + k = m + k \Leftrightarrow nk = mk$;

2. $n < m \Leftrightarrow n + k < m + k \Leftrightarrow nk < mk$.

Beweis: Übung mit vollständiger Induktion nach k. □

2.2 Ganze Zahlen

Definition 2.12 (und Satz). 1. Für $(a, b),\ (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit Äquivalenzklassen

$$\big[(a, b)\big] := \big\{(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + d = b + c\big\}.$$

Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} := \Big\{\big[(a, b)\big] : a, b \in \mathbb{N}\Big\}$.

2. Für $\big[(a, b)\big],\ \big[(c, d)\big] \in \mathbb{Z}$ sind die Verknüpfungen

(a) *Addition:* $\big[(a, b)\big] +_{\mathbb{Z}} \big[(c, d)\big] := \big[(a + c, b + d)\big] \in \mathbb{Z}$,

(b) *Multiplikation:* $\big[(a,b)\big] \cdot_{\mathbb{Z}} \big[(c,d)\big] := \big[(ac+bd, ad+bc)\big] \in \mathbb{Z}$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

$+_{\mathbb{Z}}$ und $\cdot_{\mathbb{Z}}$ sind assoziativ, kommutativ und distributiv (vgl. Lemma 2.6).
Zudem gilt: $\big[(1,1)\big] \in \mathbb{Z}$ ist *neutrales Element* von $+_{\mathbb{Z}}$, d.h.

$$\forall \big[(a,b)\big] \in \mathbb{Z} : \quad \big[(a,b)\big] +_{\mathbb{Z}} \big[(1,1)\big] = \big[(a,b)\big].$$

$\forall z := \big[(a,b)\big] \in \mathbb{Z}$ gilt $-z := \big[(b,a)\big] \in \mathbb{Z}$ ist *inverses Element* bezüglich $+_{\mathbb{Z}}$, d.h.

$$\big[(a,b)\big] +_{\mathbb{Z}} \big[(b,a)\big] = \big[(1,1)\big].$$

Definition 2.13. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

1. $n_{\mathbb{Z}} := \big[(1+n,1)\big] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ := \{n_{\mathbb{Z}} : n \in \mathbb{N}\}$,
2. $0_{\mathbb{Z}} := \big[(1,1)\big] \in \mathbb{Z}$,
3. $(-n)_{\mathbb{Z}} := \big[(1,1+n)\big] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_- := \big\{(-n)_{\mathbb{Z}} : n \in \mathbb{N}\big\}$.

Satz 2.14.
1. Die Abbildung $i_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$, $i_{\mathbb{N}} : n \mapsto n_{\mathbb{Z}}$ ist eine Bijektion und es gilt
$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \dot\cup \{0_{\mathbb{Z}}\} \dot\cup \mathbb{Z}_-.$$
2. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ gilt die Verträglichkeit
$$(n+m)_{\mathbb{Z}} = n_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} m_{\mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad (n \cdot m)_{\mathbb{Z}} = n_{\mathbb{Z}} \cdot_{\mathbb{Z}} m_{\mathbb{Z}}.$$
3. *Subtraktion:* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ sei $z_1 -_{\mathbb{Z}} z_2 := z_1 +_{\mathbb{Z}} (-z_2)$. Dann gelten alle aus der Schule bekannten Regeln für $+_{\mathbb{Z}}$, $-_{\mathbb{Z}}$ und $\cdot_{\mathbb{Z}}$.
4. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ definiert
$$z_1 \leqslant_{\mathbb{Z}} z_2 :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} : z_2 = z_1 +_{\mathbb{Z}} n$$
eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}, \leqslant_{\mathbb{Z}})$ ist total geordnet. Es gilt die Verträglichkeit:
$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \quad n_{\mathbb{Z}} \leqslant_{\mathbb{Z}} m_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow n \leqslant m.$$

Bemerkung 2.15.

1. Von nun an werden alle Markierungen $_{\mathbb{Z}}$ weggelassen.
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist eine abelsche Halbgruppe.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

2.3 Rationale Zahlen

Satz 2.16. Sei $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definiert
$$(a,b) \sim_{\mathbb{Q}} (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc$$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mit Äquivalenzklassen
$$\big[(a,b)\big] := \big\{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (c,d) \sim_{\mathbb{Q}} (a,b)\big\}.$$
Menge der *rationlen Zahlen* $\mathbb{Q} := \Big\{\big[(a,b)\big] : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\Big\}$.

2. Addition $\big[(a_1,b_1)\big] +_{\mathbb{Q}} \big[(a_2,b_2)\big] := \big[(a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2)\big]$ und
Multiplikation $\big[(a_1,b_1)\big] \cdot_{\mathbb{Q}} \big[(a_2,b_2)\big] := \big[(a_1a_2, b_1b_2)\big]$ sind wohldefiniert.

3. $+_{\mathbb{Q}}$ und $\cdot_{\mathbb{Q}}$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv.

4. $0_{\mathbb{Q}} := \big[(0,1)\big] \in \mathbb{Q}$ ist neutrales Element von $+_{\mathbb{Q}}$,
Zu jedem $\big[(a,b)\big] \in \mathbb{Q}$ ist $\big[(-a,b)\big] \in \mathbb{Q}$ inverses Element bezüglich $+_{\mathbb{Q}}$.

5. $1_{\mathbb{Q}} := \big[(1,1)\big] \in \mathbb{Q}$ ist neutrales Element von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\cdot_{\mathbb{Q}}$ und $\forall \big[(a,b)\big] \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ ist $\big[(b,a)\big] \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ inverses Element bezüglich $\cdot_{\mathbb{Q}}$.
Zusammenfassung von 1. – 5.: $\mathbb{Q}$ ist Körper.

6. $(\mathbb{Q}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ ist total geordnet, wobei
$$\big[(a_1,b_1)\big] \leqslant_{\mathbb{Q}} \big[(a_2,b_2)\big] :\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{Z}_+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\},\ \exists n \in \mathbb{N} : \\ \big[(a_2,b_2)\big] = \big[(a_1,b_1)\big] +_{\mathbb{Q}} \big[(m,n)\big].$$
Die Ordnung ist verträglich mit der auf $\mathbb{Z}$. Die Definitionen von $<_{\mathbb{Q}}$, $>_{\mathbb{Q}}$, $\geqslant_{\mathbb{Q}}$ sind analog zu Def. 2.7.

Definition 2.17.

1. $\forall (a_1,b_1),(a_1,b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ sei
$$\big[(a_1,b_1)\big] -_{\mathbb{Q}} \big[(a_2,b_2)\big] := \big[(a_1,b_1)\big] +_{\mathbb{Q}} \big[(-a_2,b_2)\big].$$

2. $\forall (a_1,b_1),(a_1,b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mit $\big[(a_2,b_2)\big] \neq \Big\{\big[(0,1)\big]\Big\}$ sei
$$\frac{\big[(a_1,b_1)\big]}{\big[(a_2,b_2)\big]}_{\mathbb{Q}} := \big[(a_1,b_1)\big] \cdot_{\mathbb{Q}} \big[(b_2,a_2)\big].$$

3. Für $z \in \mathbb{Z}$ sei $z_{\mathbb{Q}} := \big[(z,1)\big]$.

Satz 2.18. Unter Weglassung aller $_{\mathbb{Q}}$ (ab sofort!) gilt

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z}^* : \quad \frac{a}{b} = \big[(a,b)\big],$$

sowie alle bekannten Rechenregeln für $+, -, \cdot, /, \leqslant, <, >, \geqslant$.

Lemma 2.19.

1. Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist *Archimedisch*, d.h.

$$\forall q, r \in \mathbb{Q} \text{ mit } q, r > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ q < nr.$$

2. $\mathbb{Q}$ ist *dicht*:

$$\forall q, r \in \mathbb{Q} \text{ mit } q < r\ \exists s \in \mathbb{Q} :\ q < s < r.$$

Beweis:

1. Schreibe $q = a/b,\ r = c/d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Für $n := (a+1)d \in \mathbb{N}$ gilt $nr = (a+1)dc/d = (a+1)c > a/b = q$.
2. Wähle $s := (q+r)/2 \in \mathbb{Q}$. Es gelten
   (a) $s = q + (r-q)/2\ \wedge\ (r-q)/2 > 0\ \Rightarrow s > q$;
   (b) $r = s + (r-q)/2\ \wedge\ (r-q)/2 > 0\ \Rightarrow r > s$.

□

Definition 2.20. 1. Sei $q \in \mathbb{Q}$. *(Absolut-)Betrag:*

$$|q| := \begin{cases} q, & q \geqslant 0; \\ -q, & q < 0. \end{cases}$$

2. Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

$$\max\{q_1, q_2\} := \begin{cases} q_1, & q_1 \geqslant q_2; \\ q_2, & q_1 < q_2; \end{cases} \qquad \min\{q_1, q_2\} := \begin{cases} q_1, & q_1 < q_2; \\ q_2, & q_1 \geqslant q_2. \end{cases}$$

Somit gilt $|q| = \max\{q, -q\} \geqslant 0$.

Satz 2.21. Sei $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$.

1. $\forall q \in \mathbb{K}$ gilt $|q| \geqslant 0$ und $|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$.

2. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}$ gilt $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$.

3. *Dreiecksungleichung:* $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{K}$ gilt $|q_1 + q_2| \leqslant |q_1| + |q_2|$.

Beweis:

1. Folgt sofort aus Definition 2.20.

2. Für $j = 1, 2$ sei $q_j = s_j r_j$ mit $r_j \geqslant 0$ und $s_j \in \{1, -1\}$. Dann gilt $|q_j| = r_j$ und $q_1 q_2 = (s_1 s_2) r_1 r_2$ mit $s_1 s_2 \in \{1, -1\}$ und $r_1 r_2 \geqslant 0 \Rightarrow |q_1 q_2| = r_1 r_2 = |q_1||q_2|$.

3. Es gilt $q_1 \leqslant |q_1| \wedge q_2 \leqslant |q_2| \Rightarrow q_1 + q_2 \leqslant |q_1| + |q_2|$ und
$-q_1 \leqslant |q_1| \wedge -q_2 \leqslant |q_2| \Rightarrow -(q_1 + q_2) \leqslant |q_1| + |q_2|$.
Daher gilt $|q_1 + q_2| = \max\left\{q_1 + q_2, -(q_1 + q_2)\right\} \leqslant |q_1| + |q_2|$.

□

Satz 2.22. $\nexists c \in \mathbb{Q}$ mit $c^2 := c \cdot c = 2$.

Beweis:

1. $\forall n \in \mathbb{Z}$ ungerade $\exists k \in \mathbb{Z}:\ n = 2k - 1 \Rightarrow n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 2k + 1$ ist ungerade.

2. Annahme: $\exists c \in \mathbb{Q}$ mit $c^2 = 2 \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}^*$ teilerfremd mit $c = p/q$ $\Rightarrow 2 = c^2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$ ist gerade $\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow}$ p gerade $\Rightarrow p = 2r$ mit $r \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2r^2 = q^2 \overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow}$ q gerade $\Rightarrow$ p, q nicht teilerfremd $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ Annahme ist falsch.

□

2.4 Endliche Summen

Definition 2.23.

1. Für $k, l \in \mathbb{Z}$ sei $\{k, \dots, l\} := \{m \in \mathbb{Z} : k \leqslant m \leqslant l\}$.

2. Sei M Menge. M ist *endlich* $:\Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ und $\exists$ Bijektion $b : \{1, \dots, n\} \to M$. In diesem Fall ist die *Anzahl der Elemente* von M:
$$|M| := \#M := n.$$

3. $|\varnothing| := \#\varnothing := 0$.

Sei $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$.

Definition 2.24. 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ sei $a_k \in \mathbb{K}$. Die (endliche) *Summe:*

$$\sum_{k=1}^{0} a_k := 0; \ \forall m \leqslant n: \ \sum_{k=1}^{m} a_k := \sum_{k=1}^{m-1} a_k + a_m = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m.$$

2. Sei J endliche Menge, $b : \{1, \dots, \#J\} \to J$ Bijektion und $\forall j \in J$ sei $a_j \in \mathbb{K}$.

$$\sum_{j \in J} a_j := \sum_{k=1}^{\#J} a_{b(k)}, \qquad \sum_{j \in \varnothing} a_j := 0.$$

Spezialfall: für $k, l \in \mathbb{Z}$ und $J = \{k, \dots, l\}$ wir definieren

$$\sum_{i=k}^{l} a_i := \sum_{j \in \{k, \dots, l\}} a_j.$$

Beispiel 2.25.

1. $\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = \sum_{j=1}^{3} j = \sum_{j=0}^{2} (j+1) = \sum_{j=2}^{4} (j-1)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Beweis per Induktion: $n := 0 : \quad 0 = 0$. $n \mapsto n+1 :$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{Iduktionsannahme}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k \in \{1, \dots, 2n\} \cap \{\text{Ungerade ganze Zahlen}\}} k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Beweis per Induktion: $n := 0 : \ 0 = 0$. $\qquad n \mapsto n+1 :$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2n+1) \overset{\text{Iduktionsannahme}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

4. *Geometrische Summe:*

$$\forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis per Induktion oder

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Definition 2.26.

1. *(Endliches) Produkt:* Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $a_k \in \mathbb{K}$.
$$\prod_{k=1}^{0} a_k := 1; \ \forall m \leqslant n: \ \prod_{k=1}^{m} a_k := a_m \prod_{k=1}^{m-1} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{m-1} \cdot a_m.$$
2. *Potenz:* $\forall a \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0: \quad a^n := \prod_{k=1}^{n} a.$
3. *Fakultät:* $\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad n! := \prod_{j=1}^{n} j.$
4. *Binomialkoeffizient:* $\forall q \in \mathbb{K}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$
$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} \dfrac{q+1-j}{j}, & k \geqslant 0; \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$
Speziell für $q = n \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \leqslant k \leqslant n; \\ 0, & k < 0 \ \vee \ k > n. \end{cases}$$

Satz 2.27 (Binomischer Satz)**.** $\forall x, y \in \mathbb{K} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$
$$\text{Spezialfälle:} \quad \begin{aligned} (x+y)^0 &= 1; \\ (x+y)^1 &= x + y; \\ (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2; \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3. \end{aligned}$$

Beweis: Per Induktion: $n = 0: (x+y)^0 = 1$ nach Def. 2.26.2.
$$n \mapsto n+1: \ (x+y)^{n+1} = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$
$$\underset{\binom{n}{n+1}=0}{=} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} x^l y^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} \underset{\text{Übung!}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.$$
□

Korollar 2.28. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad (\text{setze } x := y := 1 \text{ in Satz 2.27}),$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (\text{setze } -x := y := 1 \text{ in Satz 2.27}).$$

2.5 Folgen, Grenzwerte, Reihen

Definition 2.29. *Folge:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ $:\Leftrightarrow$ Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto a_n$. Analog mit $\mathbb{N}_0$ statt $\mathbb{N}$.

Beispiel 2.30.

1. Konstante Folge: $(a)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, a, \dots)$ mit $a \in \mathbb{K}$.
2. Alternierende Folge: $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, \dots)$.
3. Geometrische Folge: $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a^2, a^3, \dots)$ mit $a \in \mathbb{K}$.
4. Fibonacci-Folge (Rekursive Definition): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$.

Definition 2.31.

1. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist *konvergent* gegen den *Grenzwert/Limes* $a \in \mathbb{K}$ $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a :\Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{K}$ mit $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geqslant N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.
2. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist eine *Nullfolge* $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
3. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist *divergent* $:\Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{K}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
4. Spezialfall von 3: Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ *divergiert nach* $+\infty$ $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty :\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geqslant N$ gilt $a_n > s$.
   Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ *divergiert nach* $-\infty$ $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$.

Beispiel 2.32. In Beispiel 2.30 gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$, da $N := 1$ ist gut für alle $\varepsilon > 0$.
2. Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist divergent. *Beweis:* Annahme: $(-1)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{K} \Rightarrow$ Für $\varepsilon := 1$ $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geqslant N: \big|(-1)^n - a\big| < \varepsilon = 1$. Andererseits, für $n \geqslant N$ gilt

$$\begin{aligned} 2 &= \big|(-1)^{n+1} - (-1)^n\big| = \big|(-1)^{n+1} - a + a - (-1)^n\big| \\ &\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leqslant} \big|(-1)^{n+1} - a\big| + \big|a - (-1)^n\big| < 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Widerspruch! $\Rightarrow$ Annahme falsch. $\square$

3. und 4.: Übung! Desweiteren:

5. $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge. *Beweis:* Sei $\varepsilon > 0$. Laut Lemma 2.19.1 $\exists N \in \mathbb{N} : 1 < N\varepsilon \;\Rightarrow\; \forall n \geqslant N : 0 < 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon$. $\square$

Satz 2.33 (Eindeutigkeit des Limes)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge, seien $a, b \in \mathbb{K}$ und sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Dann gilt $a = b$.

Beweis: Annahme: $a \neq b$. Sei $\varepsilon := |a-b|/2 > 0$. Nach Voraussetzung $\exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : \; \forall n \geqslant N_a \; |a_n - a| < \varepsilon$ und $\forall n \geqslant N_b \; |a_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \; \forall n \geqslant \max\{N_a, N_b\}$: $|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leqslant} |a - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon = |a-b|$. Widerspruch! $\square$

Definition 2.34.

1. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist beschränkt von oben $:\Leftrightarrow \; \exists S \in \mathbb{K} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \leqslant S$.

2. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist beschränkt von unten $:\Leftrightarrow \; \exists S \in \mathbb{K} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \geqslant S$.

3. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist beschränkt $:\Leftrightarrow \; \exists S \in \mathbb{K} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; |a_n| \leqslant S$.

Satz 2.35. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ Folge. Dann gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant N : \; |a_n - a| < 1 \;\; \Rightarrow \;\; \forall n \geqslant N \; |a_n| = |a_n - a + a| < |a| + 1$. Setze $S := \max\big\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\big\} \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| \leqslant S$. $\square$

Bemerkung 2.36. Umkehrung von Satz 2.35 ist nicht immer wahr: Die Folge aus Beispiel 2.30.2 ist beschränkt (mit $S := 1$), aber nicht konvergent (siehe Beispiel 2.32.2).

Satz 2.37. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{K}$ konvergente Folgen mit Limiten a und b. Dann gilt

1. $(a_n + b_n)_n$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big) + \big(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\big)$;

2. $(a_n b_n)_n$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\big)$.

Beweis:

1. Übung.

2. Laut Satz 2.35, $(a_n)_n$ ist beschränkt $\Rightarrow$ $\exists S \in \mathbb{K} \setminus \{0\}: \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant S \ \wedge |b| \leqslant S$. Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$. Da $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergent, $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: |a_n - a| < \tilde{\varepsilon} \ \wedge \ |b_n - b| < \tilde{\varepsilon} \ \Rightarrow \ \forall n \geqslant N\ |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < 2S\tilde{\varepsilon}$. Sei nun $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/(2S) \ \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \ |a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

□

Satz 2.38 (Quotient konvergenter Folgen)**.** Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{K}$ konvergente Folgen mit Limiten a und $b \neq 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N$ gilt

1. $b_n \neq 0$;
2. Sei $\mathbb{N}_N := \{N, N+1, N+2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$. Die Folge $(a_n/b_n)_{\mathbb{N}_N}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Beweis:

1. $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \ |b_n - b| < b/2 \ \Rightarrow \ \forall n \geqslant N: \ |b| \leqslant |b_n| + |b - b_n| < |b_n| + |b|/2 \ \Rightarrow \ |b_n| > |b|/2 > 0 \Rightarrow b_n \neq 0$.
2. Es genügt zu zeigen, dass $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}_N}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$ (und dann Satz 2.37.2 anzuwenden). Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$. Dann $\exists M \geqslant N$ $\forall n \geqslant M: \ |b_n - b| < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \ \left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \left|\dfrac{b_n - b}{b_n b}\right| = \dfrac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \dfrac{2\tilde{\varepsilon}}{|b|^2} =: \varepsilon$.

□

Beispiel 2.39.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \dfrac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \dfrac{3 + 13/n}{1 - 2/n^2}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (Verwende Beispiel 2.32.3 und Sätze 2.37 und 2.38).
2. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := n, \ b_n := 1, \ c_n := a_n + b_n \ \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Satz 2.40 (Analogon zu Satz 2.38 für $b = 0$)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ Nullfolge und $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$). Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = +\infty$ (bzw. $-\infty$).

Beweis: Sei $S \in \mathbb{N}$ beliebig $\underset{(a_n)_n \text{ Nullfolge}}{\Rightarrow}$ $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N: \ 0 < a_n < 1/S \ \Leftrightarrow$ $1/a_n > S$ (Analog für $a_n < 0$). □

Satz 2.41 (Verträglichkeit von lim und Ordnung)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergente Folgen mit $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant b_n$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Sei $\forall n \in \mathbb{N}\ c_n := b_n - a_n \geqslant 0$. Laut Satz 2.37 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Annahme: $c < 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N : \ c_n - c = |c_n - c| < |c|/2 = -c/2 \Rightarrow c_n < c/2 < 0 \Rightarrow$ Widerspruch. □

Korollar 2.42. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergente Folge und $A, B \in \mathbb{K}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\ A \leqslant a_n \leqslant B$. Dann gilt $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant B$.

Bemerkung 2.43. Falls sogar $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < b_n$ gilt in Satz 2.41, so folgt im Allgemeinen nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Z.B. für $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n := 0 < b_n := 1/n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Definition 2.44. Für $k \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}_k$ sei $a_n \in \mathbb{K}$.

1. *Partialsumme:* Für $N \in \mathbb{N}_k$, $\quad S_N := \sum\limits_{n=k}^{N} a_n$.

2. *Reihe:* Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_k}$.

3. *Summe der Reihe:* Falls die Reihe $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_k}$ konvergiert, setze

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N.$$

Beispiel 2.45. Untersuche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ auf Konvergenz.
Lösung: Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} = 1 \quad (\text{ See Beispiel 2.32.3}). \quad \square$$

Satz 2.46 (Geometrische Reihe)**.** Sei $q \in \mathbb{K}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \ \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{für } |q| < 1; \\ \text{divergent,} & \text{für } |q| \geqslant 1. \end{cases}$$

Für $|q| < 1$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Beweis:

1. Für $q = 1$, $S_N = N + 1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Für $q = -1$, $S_N = \begin{cases} 1, & N \text{ gerade;} \\ 0, & N \text{ ungerade} \end{cases}$ ist divergent.

3. Für $|q| > 1 \;\vee\; |q| < 1$, laut Beispiel 2.25.4 $S_N = \dfrac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$ divergiert für $|q| > 1$, aber für $|q| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} S_N = 1/(1-q)$ (Übung!).

□

Definition 2.47.

1. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist *Cauchy-Folge* $:\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n, m \geqslant N$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

2. $\mathrm{CF}(\mathbb{Q}) := \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} : (a_n)_n \text{ ist Cauchy-Folge}\big\}$.

Satz 2.48. Sei $(a_n)_n \subset \mathbb{K}$ konvergente Folge $\Rightarrow\; (a_n)_n$ ist Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. $\exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geqslant N : \; |a_n - a| < \varepsilon/2 \;\Rightarrow$
$\forall n, m \geqslant N : \; |a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$. □

Definition 2.49. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\cdot|$, sodass Satz 2.21 gilt. $\mathbb{K}$ ist *vollständig* $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Satz 2.50. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

Beweis: Einige Ideen werden später angedeutet. □

2.6 Reelle Zahlen

Definition 2.51.

1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\; (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$. Via

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \;:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ erklärt.

2. Menge der *reellen Zahlen*: $\mathbb{R} := \mathrm{CF}(\mathbb{Q})/\sim$ (siehe Definition 1.30.4).

Bemerkung 2.52. Da $\forall (a_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ und $\forall q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \Leftrightarrow (a_n)_n \in \big[(q, q, \dots)\big],$$

ist es üblich via $i : \mathbb{Q} \to i(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R},\; i : q \mapsto \big[(q, q, \dots)\big]$, $\mathbb{Q}$ selbst als Teilmenge von $\mathbb{R}$ anzusehen und q statt $\big[(q, q, \dots)\big]$ zu schreiben.

Definition 2.53 (und Lemma)**.** Seien $x = \big[(a_n)_n\big],\ y = \big[(b_n)_n\big] \in \mathbb{R}$. Dann sind

1. $x + y := \big[(a_n + b_n)_n\big] \in \mathbb{R}$;
2. $x \cdot y := \big[(a_n b_n)_n\big] \in \mathbb{R}$;
3. $x \leqslant y \ :\Leftrightarrow\ \exists$ Nullfolge $(\eta_n)_n \subset \mathbb{Q}:\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant b_n + \eta_n$ (analog $x \geqslant y$);
4. $x < y \ :\Leftrightarrow (x \leqslant y\ \wedge\ x \neq y) \underset{\text{Übung!}}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\ \forall n \geqslant N:$ $a_n < q_1 < q_2 < b_n$ (analog $x > y$)

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

Beweis: Nur für +: Sei $\forall n \in \mathbb{N}\ c_n := a_n + b_n$. Da $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant N:\ |a_n - a_m| < \varepsilon/2\ \wedge\ |b_n - b_m| < \varepsilon/2\ \Rightarrow\ |c_n - c_m| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon\ \Rightarrow\ (c_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$.
Seien $(\tilde{a}_n)_n \in x,\ (\tilde{b}_n)_n \in y$ andere Repräsentanten. Dann laut Satz 2.37 für $\tilde{c}_n := \tilde{a}_n + \tilde{b}_n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\tilde{c}_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n - a_n) + \lim_{n\to\infty}(\tilde{b}_n - b_n) = 0 + 0 = 0\ \Rightarrow\ (\tilde{c}_n)_n \sim (c_n)_n.$$

$\square$

Satz 2.54.

1. $\mathbb{R}$ ist ein Körper mit den neutralen Elementen $0 = \big[(0, 0, \dots)\big]$ und $1 = \big[(1, 1, \dots)\big]$.
2. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ist total geordnet und $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen: $x < 0,\ x = 0,\ x > 0$.
3. Die Ordnung $\leqslant$ auf $\mathbb{R}$ ist archimedisch (vgl. Lemma 2.19.1).
4. Der (Absolut-)Betrag $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| := \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$
hat die Eigenschaften aus Satz 2.21.
5. Die Operationen auf $\mathbb{Q}$ sind verträglich auf $\mathbb{R}$ mittels konstanten Folgen $q = \big[(q, q, \dots)\big] \in \mathbb{R}$.

Beweis: Strategie: führe auf entsprechende Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ zurück. Z.B. Kommutativität von +: $\forall x = \left[(a_n)_n\right],\ y = \left[(b_n)_n\right] \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + y = \left[(a_n + b_n)_n\right] = \left[(b_n + a_n)_n\right] = y + x.$$

Hilfsbehauptung: $\forall (a_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ gilt $\big(|a_n|\big)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ und für $x := \left[(a_n)_n\right] \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = \left[\big(|a_n|\big)_n\right]$. *Beweis*: $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \big||a_n| - |a_m|\big| \leqslant |a_n - a_m| \ \Rightarrow \left[\big(|a_n|\big)_n\right] \in \mathbb{R}$. Fall $x \geqslant 0$: $\exists$ Nullfolge $(\eta_n)_n \subset \mathbb{Q}:\ 0 \leqslant a_n + \eta_n$. Ohne Einschränkung, $\eta_n \geqslant 0$. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leqslant |a_n| - a_n = \begin{cases} 0, & a_n \geqslant 0; \\ -2a_n, & a_n < 0 \end{cases} \leqslant 2\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nun impliziert Satz 2.41, dass $\big(|a_n| - a_n\big)_n$ eine Nullfolge ist.
Analog im Fall $x < 0$. $\square$

Bemerkung 2.55. In Abschnitten 2.4 und 2.5 verwenden wir nicht, dass $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ gilt, sondern nur die Eigenschaften von $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ aus Satz 2.54. Folglich gelten alle Ergebnisse dieser Abschnitten auch mit $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

Satz 2.56. Sei $(q_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ und $x := \left[(q_n)_n\right] \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q_n := \lim\limits_{n\to\infty} \left[(q_n, q_n, \dots)\right] = x$ (Konvergenz in $\mathbb{R}$).

Beweis: Sei $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$. $\mathbb{R}$ ist archimedisch $\Rightarrow\ \exists k \in \mathbb{N}:\ \varepsilon k > 1$. $(q_n)_n \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q}) \ \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N:\ |q_n - q_m| < 1/k$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$y_n := x - \left[(q_n, q_n, \dots)\right] = \left[(q_m)_m\right] - \left[(q_n)_m\right] = \left[(q_m - q_n)_m\right].$$

Laut Hilfsbehauptung aus dem Beweis von Satz 2.54 gilt $\forall n \geqslant N\ |y_n| = \left[\big(|q_m - q_n|\big)_m\right] \leqslant 1/k < \varepsilon \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0.$ $\square$

Satz 2.57 (Cauchy)**.** $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \exists (r_k^{(n)})_k \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ mit $x_n = \left[(r_k^{(n)})_k\right] \overset{\text{Satz 2.56}}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} r_k^{(n)} = x_n \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k(n):\ |r_{k(n)}^{(n)} - x_n| < 1/n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $q_n := r_{k(n)}^{(n)} \subset \mathbb{Q}$.

2. Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0$. $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$: $|q_m - q_n| = |r^{(m)}_{k(m)} - x_m + x_m - x_n + x_n - r^{(n)}_{k(n)}| \leqslant |r^{(m)}_{k(m)} - x_m| + |x_m - x_n| + |x_n - r^{(n)}_{k(n)}|$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q}) \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N:\ |x_m - x_n| < \varepsilon/3$.
$\forall n, m \geqslant 3/\varepsilon\ |r^{(m)}_{k(m)} - x_m|, |x_n - r^{(n)}_{k(n)}| < \varepsilon/3$.
$\Rightarrow \forall n, m \geqslant \max\{N, 3/\varepsilon\}\ |q_m - q_n| < \varepsilon \;\Rightarrow (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$.

3. Sei $x := \big[(q_n)_n\big]$. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leqslant |x_n - x| \leqslant |x_n - q_n| + |q_n - x|$. Übergang zum Limes $n \to \infty$ und Anwendung von Sätze 2.41 und 2.56 liefert $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, also $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

□

Definition 2.58. Sei $b \in \mathbb{N}_2$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant -n_0$ sei $a_n \in \{0, \dots, b - 1\}$. *b-adischer Bruch*: Reihe $\pm \sum\limits_{n=-n_0}^{\infty} a_n/b^n$. Für $b := 10$: *Dezimalbruch*. Für $b := 2$: *dyadischer Bruch*.

Satz 2.59. Sei $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_{-n_0}} \subset \mathbb{Q}$ Folge der Partialsummen des b-adischen Bruchs aus Definition 2.58. Dann $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_{-n_0}} \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$
$\Rightarrow\ x := \big[(S_N)_{N\in\mathbb{N}_{-n_0}}\big] \in \mathbb{R}$ und nach Satz 2.56 auch $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = x$.

Beweis: Seien $M, N \in \mathbb{N}_{-n_0}$, $M \leqslant N \;\Rightarrow |S_N - S_M| = \Big| \pm \sum\limits_{n=M+1}^{N} a_n/b^n \Big| \leqslant \sum\limits_{n=M+1}^{N} 1/b^{n-1} \leqslant \sum\limits_{n=M+1}^{\infty} 1/b^{n-1} = b^{-M} \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/b^n = \dfrac{b^{-M}}{1 - 1/b} \leqslant 2b^{-M}$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists K \in \mathbb{N}:\ 2b^{-K} < \varepsilon \;\Rightarrow |S_N - S_M| < \varepsilon\ \forall N, M \geqslant K$. □

Satz 2.60. Sei $b \in \mathbb{N}_2$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists$ b-adischer Bruch, so dass
$x = \pm \sum\limits_{n=-n_0}^{\infty} a_n/b^n = \pm a_{-n_0} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ (in b-adischer Darstellung).

Beweis: Ohne Einschränkung, sei $x > 0$. $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet $\Rightarrow\ \exists m \in \mathbb{N}_0:\ x < 1 + (m+1)(b-1) \underset{\text{Satz 2.27}}{\leqslant} (b - 1 + 1)^{m+1} = b^{m+1}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ kleinste Zahl mit $x < b^{n_0+1}$. Es genügt zu beweisen:
Beh.: $\forall N \in \mathbb{N}_{-n_0}\ \forall n \in \{-n_0, -n_0+1, \dots, N\}\ \exists a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}\ \exists \xi_N \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant \xi_N < b^{-N}:\ x = \sum\limits_{n=-n_0}^{N} a_n/b^n + \xi_N$.
Beweis per Induktion nach N: Induktionsanfang: $N := -n_0 \;\Rightarrow$ nach Wahl von n_0 gilt $0 \leqslant x/b^{n_0} < b \;\Rightarrow\; \exists_1 a_{-n_0} \in \{0, 1, \dots, b-1\}:\ x/b^{n_0} = a_{-n_0} + \delta$ mit $0 \leqslant \delta < 1$. Sei $\xi_{-n_0} := b^{n_0}\delta \;\Rightarrow\; 0 \leqslant \xi_{-n_0} < b^{n_0},\ x = a_{-n_0}/b^{-n_0} + \xi_{-n_0}$.
Induktionsschritt: Sei $x = \sum\limits_{n=-n_0}^{N} a_n/b^n + \xi_N,\ 0 \leqslant \xi_N < b^{-N} \;\Rightarrow 0 \leqslant \xi_N b^{N+1} < b \;\Rightarrow\; \exists_1 a_{N+1} \in \{0, 1, \dots, b-1\}:\ \xi_N b^{N+1} = a_{N+1} + \delta$ mit $0 \leqslant \delta < 1$. Setze

$\xi_{N+1} := \delta/b^{N+1} \Rightarrow 0 \leqslant \xi_{N+1} < b^{-(N+1)}$ und $x = \sum\limits_{n=-n_0}^{N} a_n/b^n + \xi_N = \sum\limits_{n=-n_0}^{N} a_n/b^n + a_{N+1}/b^{N+1} + \xi_{N+1}$. $\square$

Definition 2.61. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. f ist monoton *wachsend* (bzw. *fallend*) $:\Leftrightarrow$ $f \nearrow$ (bzw. $f \searrow$) $:\Leftrightarrow$ $\forall x_2,\ x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

2. f ist streng/strikt monoton wachsend (bzw. fallend):$\Leftrightarrow$ $f \nearrow\!\!\!\nearrow$ (bzw. $f \searrow\!\!\!\searrow$) $:\Leftrightarrow$ $\forall x_2,\ x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

3. Sonderfall: $\mathcal{D} := \mathbb{N}_N$ mit $N \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ monotone Folgen.

Satz 2.62. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R} \nearrow$. Dann gilt $(x_n)_n$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ $(x_n)_n$ ist von oben beschränkt. Analog für $(x_n)_n \searrow$ und nach unten beschränkt.
Schreibweise: $x_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} x$ (bzw. $x_n \underset{n\to\infty}{\searrow} x$) $:\Leftrightarrow$ $(x_n)_n \nearrow$ (bzw. $x_n \searrow$) $\wedge$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Beweis: "$\Rightarrow$" gilt nach Satz 2.35.
"$\Leftarrow$": Sei $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant S \in \mathbb{R}$. Annahme: $(x_n)_n$ divergiert. Dann laut Satz 2.57 $(x_n)_n$ keine Cauchy-Folge $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n \geqslant N :\ |x_m - x_n| \geqslant \varepsilon$. O.E. sei $m > n$ $\Rightarrow x_m - x_n \geqslant \varepsilon$ (da $(x_n)_n \nearrow$). $\mathbb{R}$ ist archimedisch $\Rightarrow$ $\exists K \in \mathbb{N} :$ $S - x_1 < K\varepsilon$. Nach Annahme, für $N_1 := 1\ \exists m_1 > n_1 \in \mathbb{N} :\ x_{m_1} - x_{n_1} \geqslant \varepsilon$. Nach Annahme für $N_2 := m_1\ \exists m_2 > n_2 \in \mathbb{N} :\ x_{m_2} - x_{n_2} \geqslant \varepsilon$, usw. sodass

$$x_{m_K} - x_{n_1} = \sum_{k=1}^{K} (x_{m_k} - x_{n_k}) + \sum_{k=2}^{K} (x_{n_k} - x_{m_{k-1}}) \geqslant K\varepsilon > S - x_1$$

$\Rightarrow$ $x_{m_k} > S + x_{n_1} - x_1 > S$ $\Rightarrow$ Widerspruch! $\square$

Definition 2.63. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folge.

1. Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ strikt wachsende Folge ($\Rightarrow n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$). Dann heißt $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. $x \in \mathbb{R}$ ist *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Beispiel 2.64. Alternierende Folge: $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n := (-1)^n$. $\forall k \in \mathbb{N}\ n_k := 2k$ $\Rightarrow$ Teilfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = \left((-1)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$. $\forall l \in \mathbb{N}\ n_l := 2l + 1$ $\Rightarrow$ Teilfolge $(z_l)_{l\in\mathbb{N}} := (x_{2l+1})_{l\in\mathbb{N}} = \left((-1)^{2l+1}\right)_{l\in\mathbb{N}} = (-1)_{l\in\mathbb{N}}$. $\Rightarrow$ ± 1 sind Häufungspunkte von $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 2.65 (Bolzano-Weieirstraß , Version für $\mathbb{R}$)**.** Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge ($\Leftrightarrow$ Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt).

Beweis: $m \in \mathbb{N}$ ist eine *Gipfelstelle* von $(x_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\forall n > m:\ x_n < x_m$.
1. Fall: $(x_n)_n$ hat unendlich viele Gipfelstellen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots \Rightarrow x_{m_1} > x_{m_2} > x_{m_3} > \dots$, d.h. $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist $\searrow$ beschränkte Teilfolge von $(x_n)_n \Rightarrow (x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent nach Satz 2.62.
2. Fall: $(x_n)_n$ hat keine oder nur endlich viele Gipfelstellen. Sei $n_1 \in \mathbb{N} >$ größte Gipfelstelle.$\Rightarrow \exists n_2 > n_1 :\ \ x_{n_2} \geqslant x_{n_1}$ (sonst ist n_1 eine Gipfelstelle), $\exists n_3 > n_2 :\ \ x_{n_3} \geqslant x_{n_2}$ (sonst ist n_2 eine Gipfelstelle) usw. $\Rightarrow$ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkte, monoton fallende (dann nach Satz 2.62 konvergente) Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Definition 2.66 (Intervalle)**.** Für $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ seien

1. Eigentliche Intervalle:

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\},$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \quad (a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

2. Uneigentliche Intervalle:

$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}, \quad (-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\},$$
$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad (-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

3. *Länge* des Intervalls $\big|[a,b]\big| := \big|[a,b)\big| := \big|(a,b]\big| := \big|(a,b)\big| := b - a$.

Satz 2.67 (Intervallschachtelungsprinzip)**.** $\forall k \in \mathbb{N}$ seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k < b_k$ und $J_k := [a_k, b_k]$. Es gelte *Intervallschachtelung*: $(\forall k \in \mathbb{N}\ J_{k+1} \subset J_k) \wedge \lim\limits_{k\to\infty} |J_k| = 0$. Dann $\exists_1 x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} J_k$. Es gilt $a_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} x$ und $b_k \underset{k\to\infty}{\searrow} x$.

Beweis: $\forall k, l \in \mathbb{N}$ gilt $a_k \leqslant b_l$ $(*)$ (sonst $J_k \cap J_l = \varnothing$!). $\Rightarrow$ $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$ ist beschränkt und nach Satz 2.62 $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $a_k \nearrow a$. Analog ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \searrow$ beschäenkt $\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}$ mit $b_k \searrow b$. Nach Satz 2.37 gilt $a - b = \lim\limits_{k\to\infty}(a_k - b_k) = 0 \ \Rightarrow a = b =: x$. Übergehen wir zum Limes $l \to \infty$ in $(*)$, so erhalten wir $\forall k\ a_k \leqslant x$. Analog mit $k \to \infty$ folgt $\forall l\ x \leqslant b_l$. Folglich $\forall k \in \mathbb{N}\ a = b \in J_k$.
Eindeutigkeit: $\forall y \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} J_k$ gilt $\forall k \in \mathbb{N}\ y \in [a_k, b_k] \ \Rightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}:\ a_k \leqslant y \leqslant b_k$.
Übergehen wir zum Limes $k \to \infty$, so erhalten wir $x \leqslant y \leqslant x \ \Rightarrow y = x$. $\square$

Satz 2.68 (Wurzel)**.** Sei $x \in (0,\infty)$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann $\exists_1 r \in (0,\infty)$ mit $r^k = x$. Schreibweise: $x^{1/k} := \sqrt[k]{x} := r$ (k–te Wurzel aus x).

Beweis: Definiere die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ mittels

$$r_1 := 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad r_{n+1} := \frac{1}{k}\Big((k-1)r_n + \frac{x}{r_n^{k-1}}\Big).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $r_n > 0$ (per Induktion). Ferner gilt nach Satz 2.27 unter Beachtung $\binom{k}{1} = k$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_{n+1} = r_n\left(1 + \frac{1}{k}\Big(\frac{x}{r_n^k} - 1\Big)\right) \Rightarrow r_{n+1}^k \geqslant r_n^k\left(1 + k\frac{1}{k}\Big(\frac{x}{r_n^k} - 1\Big)\right) = x.$$

Folglich $\forall n \in \mathbb{N}_2 : r_n \geqslant x \;\Rightarrow\; \frac{1}{k}\Big(\frac{x}{r_n^k} - 1\Big) < 0 \;\Rightarrow r_{n+1} < r_n \;\Rightarrow\; r_n \searrow$. Dann laut Satz 2.62 $\exists r := \lim_{n\to\infty} r_n \in [0,\infty)$. Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_{n+1}r_n^{k-1} := \frac{1}{k}\big((k-1)r_n^k + x\big)$. Im Limes $n \to \infty$ mit Satz 2.37 erhalten wir $r^k := \frac{1}{k}\big((k-1)r^k + x\big) \;\Rightarrow r^k = x \;\Rightarrow r > 0$ (sonst $x = 0$). Eindeutigkeit: $\forall r' > r$ gilt $(r')^k > r^k = x$, analog mit $r' < r$. $\square$

Definition 2.69 (Rationale Potenzen)**.** Sei $x \in (0,\infty)$, $q = m/n \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$x^q := \big(\sqrt[n]{x}\big)^m = \big(x^{1/n}\big)^m \in (0,\infty) \qquad \text{(insbesondere, } x^0 = 1\text{)}.$$

Außerdem,

$$0^q := \begin{cases} 0, & q > 0; \\ 1, & q = 0; \\ \text{nicht definiert}, & q < 0. \end{cases}$$

Satz 2.70.

1. x^q aus Definition 2.69 ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von Darstellung $q = m/n = m'/n'$.

2. $\forall x, y \in (0,\infty)$ $\forall q, r \in \mathbb{Q}$

$$(xy)^q = x^q y^q, \quad x^q x^r = x^{q+r}, \quad (x^q)^r = x^{qr}.$$

Beweis: Übung! $\square$

Definition 2.71. Sei $A \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

1. *ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$:* $\quad \mathcal{U}_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$.

2. $a \in \mathbb{R}$ ist *Häufungspunkt* von A $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ enthält unendlich viele Punkte von A.

3. A ist *von oben beschränkt* $:\Leftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{R}:$ $\forall x \in A$ $x \leqslant S$.
   S heißt *obere Schranke* von A.

4. A ist *von unten beschränkt* $:\Leftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{R}:$ $\forall x \in A$ $x \geqslant S$.
   S heißt *untere Schranke* von A.

5. A ist *beschränkt* $:\Leftrightarrow$ A ist von oben und unten beschränkt.

Beispiel 2.72.

1. Jedes $a \in [0,1]$ ist Häufungspunkt von $(0,1)$ (oder $[0,1]$)

2. Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ (siehe b-adische Bruchapproximation!)

3. 0 ist Häufungspunkt von $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

5. A ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{R}:$ $\forall x \in A$ $|x| \leqslant S$.

Definition 2.73. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $S, I \in \mathbb{R}$.

1. S ist *Supremum* von A (kleinste obere Schranke) $:\Leftrightarrow$ $S := \sup A$ $:\Leftrightarrow$ S ist obere Schranke von $A \wedge \forall S' \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A gilt $S \leqslant S'$.

2. I ist *Infimum* von A (größte untere Schranke) $:\Leftrightarrow$ $I := \inf A$ $:\Leftrightarrow$ I ist untere Schranke von $A \wedge \forall I' \in \mathbb{R}$ untere Schranke von A gilt $I \geqslant I'$.

3. S ist *Maximum* von A $:\Leftrightarrow$ $S := \max A$ $:\Leftrightarrow$ $S = \sup A \;\wedge\; S \in A$.

4. I ist *Minimum* von A $:\Leftrightarrow$ $I := \min A$ $:\Leftrightarrow$ $I = \inf A \;\wedge\; I \in A$.

5. $\sup \varnothing := -\infty$, $\inf \varnothing := +\infty$.

6. $\sup A := +\infty$, falls $A \neq \varnothing$ nicht von oben beschränkt.

7. $\inf A := -\infty$, falls $A \neq \varnothing$ nicht von unten beschränkt.

Satz 2.74.

1. $\forall A \subset \mathbb{R}$ $\exists \sup A \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
   $A \neq \varnothing$ von oben beschränkt $\Rightarrow$ $\sup A \in \mathbb{R}$.

2. $\forall A \subset \mathbb{R}$ $\exists \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$. $A \neq \varnothing$ von unten beschränkt $\Rightarrow$ $\inf A \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir beweisen nur den Fall $A \neq \varnothing$ von oben beschränkt $\Rightarrow\ \sup A \in \mathbb{R}$. Der Rest ist analog oder trivial. Sei $S_1 \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A und $x_1 \in A$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $[x_1, S_1] \supset [x_2, S_2] \supset [x_3, S_3] \supset \dots$ sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $x_n \in A$;

(b) S_n ist obere Schranke von A;

(c) $S_n - x_n \leqslant 2^{1-n}(S_1 - x_1)$.

Fall $n = 1$ ist klar. Weiter per Induktion: Sei $M_n := (x_n + S_n)/2$.
Fall $A \cap (M_n, S_n] = \varnothing \ \Rightarrow\ M_n$ obere Schranke von A: $x_{n+1} := x_n,\ S_{n+1} := M_n$ erfüllen (a)–(c).
Fall $A \cap (M_n, S_n] \neq \varnothing$: Wähle $x_{n+1} \in A \cap (M_n, S_n]$, $S_{n+1} := S_n \Rightarrow$ (a)–(c) erfüllt.
Laut Satz 2.67 $\exists_1 S \in \mathbb{R}$ mit $S_n \underset{n\to\infty}{\searrow} S \ \wedge\ x_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} S$.
Nun $\forall x \in A\ \forall n \in \mathbb{N}:\ x \leqslant S_n \ \Rightarrow x \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \ \Rightarrow\ S$ ist obere Schranke von A. Sei S' obere Schranke von $A \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant S' \ \Rightarrow\ S = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant S' \ \Rightarrow$ $S = \sup A$. $\square$

Beispiel 2.75. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

1. $\sup[a,b] = \sup[a,b) = b$; $\quad \inf[a,b] = \inf(a,b] = a$.
2. $a = \min[a,b], \quad b = \max[a,b]$.
3. $[a,b)$ hat kein Maximum. $(a,b]$ hat kein Minimum.
4. $\sup\big\{n/(n+1) : n \in \mathbb{N}\big\} = 1$.

2.7 Komplexe Zahlen

Motivation: mathematischer Rahmen für Lösungen der polynomialen Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$.

Definition 2.76 (Komplexe Zahlen)**.** $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit den zwei Verknüpfungen $\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) +_{\mathbb{C}} (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ (x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

Satz 2.77. $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ ist ein Körper.

Beweis: Kommutativität, Assoziativität und Distributivität von $+_{\mathbb{C}}$ und $\cdot_{\mathbb{C}}$ folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$.

	$+_{\mathbb{C}}$	$\cdot_{\mathbb{C}}$
Neutrales Element	$(0,0)$	$(1,0)$
Inverses Element zu $z=(x,y)\in\mathbb{C}$	$-z := (-x,-y)$	für $z \neq (0,0)$: $\frac{1}{z} := z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

□

Bemerkung 2.78. Die Abbildung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ J : x \mapsto (x,0)$ ist ein Körperhomomorphismus, d.h. $\left(\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}\right)$ erfüllt alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ identifiziere $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$, Notation: $\forall x \in \mathbb{R}\ x := (x,0)$ so dass $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Somit gilt unter Weglassung von $_{\mathbb{C}}$:

Lemma 2.79. Sei $z := (x,y) \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{i} := (0,1)$.

1. $\mathrm{i}^2 = -1$.
2. $\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$.
3. $z = x + \mathrm{i}y$.

Beweis: Verwende Definition 2.76. □

Definition 2.80. Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ sind

1. $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ *das komplex konjugierte von* z (entspricht Spiegelung an x-Achse),
2. $\operatorname{Re} z := x$ *Realteil von* z,
3. $\operatorname{Im} z := y$ *Imaginärteil von* z.

Lemma 2.81. Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten

1. $\overline{\overline{z}} = z,\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;
2. $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z,\ \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2},\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$;
3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$;
4. $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geqslant 0,\ \forall z \neq 0 : \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

Definition 2.82 (und Satz)**.** Die *Betragsabbildung*
$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = (z\overline{z})^{1/2}$ erfüllt

1. $|z| \geqslant 0, \;\forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$;

2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}:\; |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}:\; |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Beweis:

1. Klar wegen Lemma 2.81.3.

2. $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$.

3. $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2$
$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = \big(|z_1| + |z_2|\big)^2$.

□

Definition 2.83. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen $z \in \mathbb{C}$ $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \;:\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geqslant N:\; |z_n - z| < \varepsilon.$$

Dabei ist $\{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| < \varepsilon\}$ eine Kreisscheibe um z mit Radius ε.

Bemerkung 2.84 (Warnung!)**.** Da keine natürliche Ordnung auf $\mathbb{C}$ existiert, können

- bestimmte Divergenz nach $\pm\infty$;
- Beschränktheit von oben/unten;
- Verträglichkeit von Limes und Ordnung;
- monoton wachsende/fallende Folgen;
- Intervallschachtelungsprinzip;
- obere/untere Schranken, Supremum/Infimum, Minimum/Maximum;

nicht von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ verallgemeinert werden!

Satz 2.85. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Dann gilt $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathbb{R}$. Im Fall der Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$
$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N: \ |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|^2 = |z_n - z|^2 < \varepsilon^2$.
"$\Leftarrow$": $\operatorname{Re} z_n \to x \ \wedge \ \operatorname{Im} z_n \to y \ \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \max(N_x, N_y) \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N:$
$|x_n - x| < \varepsilon/\sqrt{2} \ \wedge |y_n - y| < \varepsilon/\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \big|z_n - (x + \mathrm{i}y)\big| < \varepsilon.$ $\square$

Korollar 2.86. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folge. Dann gilt $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \ \Leftrightarrow \ \overline{z_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{z}$.

Bemerkung 2.87. Die Definitionen von Cauchy-Folgen und konvergenten Reihen wie für $\mathbb{R}$ (nur mit $|\cdot|$ aus Def. 2.82). Wegen Satz 2.85 überträgt sich alles weitere — mit Ausnahme der Warnung 2.84 genannten — auf Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.

Satz 2.88. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C} \ \Leftrightarrow \ (\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$.

Beweis: Übung! Analog zu Satz 2.85. $\square$

Korollar 2.89. $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Beweis: Übung! Verwende Satz von Cauchy für $\mathbb{R}$ (Satz 2.57). $\square$

Satz 2.90 (Bolzano-Weierstraß (Version für $\mathbb{C}$))**.** Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ beschränkt $\Rightarrow \ (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis: Übung! Verwende Sätze 2.65 und 2.85. $\square$

3 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathscr{D} \subset \mathbb{K}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ eine Funktion.

3.1 Funktionen von und nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Beispiel 3.1 (Allgemeinen Funktionen – nicht notwendigerweise stetige!)**.**

1. Konstante Funktion: für $c \in \mathbb{K}'$, $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$, $f : x \mapsto c$.
2. Betrag: $|\cdot| : \mathbb{K} \to [0, \infty)$, $|\cdot| : x \mapsto |x|$.
3. Wurzel: $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\sqrt{\cdot} : x \mapsto \sqrt{x}$.
4. Ganzzahliger Anteil: $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ ist die einzige ganze Zahl, die $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$ erfüllt.
5. Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$ $a_k \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$. Polynom n-ten Grades: $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $p : x \mapsto p(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

6. Rationale Funktion: Seien $p, q : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynome, $\mathscr{D} := \{x \in \mathbb{K} : q(x) \neq 0\}$. $r : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$, $r : x \mapsto p(x)/q(x)$.

7. Dirichlet-Kamm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Definition 3.2 (Operationen mit $\mathbb{K}'$-wertigen Funktionen)**.** Seien $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$.

1. $f + g : \mathscr{D} \to \mathscr{K}'$, $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$. Analog für "$-$", "$\cdot$" (Punktweise Operationen). Spezialfall: $\forall \alpha \in \mathbb{K}' \ \forall x \in \mathscr{D} : \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

2. $f/g : \mathscr{D} \setminus \{x \in \mathbb{K} : g(x) = 0\} \to \mathbb{K}'$, $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$.

3. Für $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} \in \{=, \leqslant, <, \geqslant, >\}$:
$f \mathcal{R} g \ :\Leftrightarrow \ \mathscr{D}(f) = \mathscr{D}(g) \ \wedge \ \forall x \in \mathscr{D}(f) \ f(x) \mathcal{R} g(x)$.

3.2 Limes einer Funktion

Definition 3.3.

1. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, sei a Häufungspunkt von $\mathscr{D}$. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = y \in \mathbb{K}' \ :\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}$ mit $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$.

2. Linksseitiger Limes: Für $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, sei a Häufungspunkt von $\mathscr{D} \cap (-\infty, a]$: $\exists \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = y \in \mathbb{K}' \ :\Leftrightarrow \ \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D} \cap (-\infty, a)$ mit $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$. Analog: rechtsseitiger Limes $\lim\limits_{x \searrow a}$.

3. Für $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ von oben unbeschränkt, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$: $\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y \in \mathbb{K}' \ :\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ mit $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$. Analog: $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

4. Falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ und für $a \in \overline{\mathbb{R}} := \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$ unabhängig von der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$. Dann setzen wir fest: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert nicht; es gilt (bestimmte) *Divergenz von f nach $+\infty$*; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Analog für $-\infty$, oder für $x \nearrow a$, $x \searrow a$.

Beispiel 3.4.

1. $f = \sqrt{\cdot}$ mit $\mathscr{D} = [0, \infty) \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \lim\limits_{x \searrow 0} \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 1/x \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

Definition 3.5. Falls $a \in \mathscr{D}$ kein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$, d.h. *a ist ein isolierter Punkt von $\mathscr{D}$*, setze $\lim\limits_{x\to a} f(x) := f(a)$.

Satz 3.6. Seien $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, a ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$ und es existieren die Grenzwerte $\varphi := \lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\gamma := \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

1. Dann gilt:

   (a) Es existiert $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \varphi + \gamma$;

   (b) Es existiert $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \varphi\gamma$;

   (c) Falls $\gamma \neq 0 \;\Rightarrow\; a$ ist Häufungspunkt von $\widetilde{\mathscr{D}} := \{x \in \mathscr{D} : \; g(x) \neq 0\}$ und es existiert $\lim\limits_{x\to a}(f/g)(x) = \varphi/\gamma$.

2. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 1. gilt für $x \nearrow a, \; x \searrow a, \; x \to \pm\infty$.

3. Falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$:

   (a) (1a) gilt für $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;

   (b) (1b) gilt für $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}, \; \gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$;

   (c) (1c) gilt für $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}, \; \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\varphi \in \mathbb{R}, \; \gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$.

4. Im 3. Fall gelten die folgenden *Rechenregeln in* $\overline{\mathbb{R}}$:

   (a) $\forall r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : \; +\infty + r := r + \infty := +\infty$;

   (b) $\forall r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} : \; -\infty + r := r - \infty := -\infty$;

   (c) $\pm\infty \cdot r := r \cdot \pm\infty := \begin{cases} \pm\infty, & r \in (0, \; +\infty] := (0, \; +\infty] \cup \{+\infty\}, \\ \mp\infty, & r \in [-\infty, 0) := (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}; \end{cases}$

   (d) $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; r/(\pm\infty) := \dfrac{1}{\pm\infty} \cdot r := 0.$

5. Die Ausdrücke $\infty - \infty, \; -\infty + \infty, \; \pm\infty \cdot 0, \; 0 \cdot (\pm\infty), \; (\pm\infty)/(\pm\infty)$ bleiben nicht definiert!

Beweis: (1a): Sei $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \;\Rightarrow\; (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi + \gamma$ laut Satz 2.37.
(1b): Analog.
(1c): $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \neq 0 \;\Rightarrow$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}, \; x_n \to a$ gilt: $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant N :$ $\left|g(x_n) - \gamma\right| < |\gamma|/2 \;\Rightarrow \left|g(x_n)\right| = \left|\gamma - \big(\gamma - g(x_n)\big)\right| \geqslant |\gamma| - \left|g(x_n) - \gamma\right| > |\gamma|/2 > 0 \;\Rightarrow a$ ist Häufungspunkt von $\widetilde{\mathscr{D}}$, da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_N} \subset \widetilde{\mathscr{D}} \setminus \{a\}$ konvergiert gegen

a. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathscr{D}} \setminus \{a\}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \;\Rightarrow\; \Big(\frac{f}{g}\Big)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varphi}{\gamma}$ laut Satz 2.38.
Z.B. (3a): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D} \setminus \{a\}$ beliebig mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Sei $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \gamma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \;\Rightarrow \exists U \in \mathbb{R}:\; \forall n \in \mathbb{N}\; g(x_n) > U$. Sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \;\Rightarrow \forall S \in \mathbb{R}\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geqslant N:\; f(x_n) > S - U \;\Rightarrow\; \forall n \geqslant N\; (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) > S \;\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = +\infty \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$. $\square$

3.3 Stetigkeit

Definition 3.7. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$.

1. f ist *folgenstetig in a* $:\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a :\; f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

2. f ist *stetig in a* $:\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 :\; \forall x \in \mathscr{D}\; |x-a| < \delta \;\Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$.

Satz 3.8. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$. Dann gilt: f stetig in $a \;\Leftrightarrow\; f$ folgenstetig in a.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ mit $x_n \to a$. $\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in \mathscr{D}$ mit $|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$. Da $x_n \to a$, $\exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geqslant N\; |x_n - a| < \delta$ und somit $\big|f(x_n) - f(a)\big| < \varepsilon \;\Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
"$\Leftarrow$": Per Widerspruch. Annahme: f ist folgenstetig, aber nicht stetig in $a \;\Leftrightarrow\; \exists \varepsilon > 0\; \forall \delta > 0\; \exists x \in \mathscr{D}$ mit $|x-a| < \delta$ und $\big|f(x) - f(a)\big| > \varepsilon$. Wählen $\delta := 1/n \;\Rightarrow\; \exists \varepsilon > 0\; \forall n \in \mathbb{N}\; \exists x_n \in \mathscr{D}$ mit $|x_n - a| < 1/n$ und $\big|f(x_n) - f(a)\big| > \varepsilon \;\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a) \;\Rightarrow$ Widerspruch. $\square$

Satz 3.9. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathscr{D}$. Dann gilt:
f ist stetig in $a \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Beweis: Falls a ein isolierter Punkt von $\mathscr{D}$, siehe Definition 3.5 und beachte, dass $\exists \delta > 0 :\; \forall x \in \mathscr{D}\; |x-a| < \delta \;\Rightarrow x = a \;\Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| = 0$.
Falls a ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$: Übung! Vergleiche Definitionen 3.7.1 und 3.3.1 und verwende Satz 3.8. $\square$

Definition 3.10. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $A \subset \mathscr{D}$.

1. f ist *stetig auf A* $:\Leftrightarrow\; \forall a \in A :\; f$ ist stetig in a.

2. f ist *stetig* $:\Leftrightarrow\; f$ ist stetig auf $\mathscr{D}$.

Beispiel 3.11.

1. Konstante Funktionen sind stetig.

2. $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} : x \mapsto x$ ist stetig.

Satz 3.12. Seien $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, stetig in $a \in \mathscr{D}$. Dann gilt:

1. $f + g$ ist stetig in a;

2. fg ist stetig in a;

3. falls $g(a) \neq 0$, $f/g : \{x \in \mathscr{D} : \ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}'$ ist stetig in a.

Beweis: Folgt aus Sätze 3.9 und 3.6. □

Korollar 3.13. Für beliebige Polynome $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ die rationale Funktion $f/g : \{x \in \mathbb{K} : \ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}$ ist stetig.

Beweis: Kombination von Beispiel 3.11 und Satz 3.12. □

Satz 3.14 (Verkettung stetiger Funktionen ist stetig)**.**
Seien $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{K}'$, $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{K}'' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g \subset \mathbb{K}'$ sowie

1. f ist stetig in $a \in \mathscr{D}_f$ und

2. g ist stetig in $f(a) \in \mathscr{D}_g$.

Dann ist $g \circ f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{K}''$ stetig in a.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_f$ beliebig mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.
f ist stetig in $a \ \Rightarrow \ y_n := f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a) =: y$.
Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_g$ mit $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in \mathscr{D}_g$ und g stetig in $y \ \Rightarrow \ g(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(y)$, also
$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) = g(y) = g\big(f(a)\big) \ \Rightarrow \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g\big(f(a)\big)$.
□

Beispiel 3.15. f ist stetig $\Rightarrow$ $|f|$ ist stetig.

Beweis: Folgt aus Satz 3.14, da $|f| = |\cdot| \circ f$ und $|\cdot|$ ist stetig auf $\mathbb{K}'$: $\forall \varepsilon > 0$ gilt
$|x - y| < \varepsilon \ \Rightarrow \ |x| - \varepsilon < |y| = |y - x + x| < |x| + \varepsilon \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon < |y| - |x| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \big||x| - |y|\big| < \varepsilon$.
□

3.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 3.16.

1. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ stetig in $a \in \mathscr{D}$ und $f(a) \neq 0$. Dann $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathscr{D}$ mit $|x-a| < \delta :\ f(x) \neq 0$.

2. Sei $f : \mathscr{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in \mathscr{D}$ und $f(a) > 0$. Dann $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathscr{D}$ mit $|x-a| < \delta :\ f(x) > 0$. Analog für < 0.

Beweis: Wähle $\varepsilon := \big|f(a)\big|/2 > 0$. f ist stetig in $a \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathscr{D}$ mit $|x-a| < \delta :\ \big|f(x) - f(a)\big| < \big|f(a)\big|/2 \ \Rightarrow \big|f(x)\big| > \big|f(a)\big|/2 > 0$. Bzw. im 2. Fall $\big|f(x) - f(a)\big| < f(a)/2 \ \Rightarrow f(x) > f(a)/2 > 0$. $\square$

Satz 3.17 (Nullstellensatz von Bolzano)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (bzw. andersrum). Dann $\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$.

Beweis: Wir konstruieren ξ als Grenzwert einer Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k],\ k \in \mathbb{N}$ mit $\forall k \in \mathbb{N}\ \ f(a_k) \geqslant 0$ und $f(b_k) \leqslant 0$. Sei $a_1 := a,\ b_1 := b$. Weiter rekursiv: Sei $M_k := (a_k + b_k)/2$.
Falls $f(M_k) = 0 :$ fertig, setze $a_{k+1} := b_{k+1} := M_k$.
Falls $f(M_k) > 0 :$ setze $a_{k+1} := M_k,\ b_{k+1} := b_k$.
Falls $f(M_k) < 0 :$ setze $a_{k+1} := a_k,\ b_{k+1} := M_k$.
Laut Satz 2.67 $\exists_1 \xi \in [a,b]$ mit $a_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \xi$ und $b_k \underset{k\to\infty}{\searrow} \xi$. Wegen Stetigkeit von f gilt $0 \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) \leqslant 0 \ \Rightarrow f(\xi) = 0$. $\square$

Korollar 3.18 (Zwischenwertsatz)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h. $\forall y \in \big[f(a), f(b)\big]\ \exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis: O.E. sei $f(a) > f(b)$ (Fall "=" ist trivial, Fall "<" ist analog).
$\forall y \in \big(f(b), f(a)\big)$ sei $g_y : [a,b] \to \mathbb{R},\ g_y(x) := f(x) - y$.
Dann g_y ist stetig (Satz 3.12), $g_y(a) > 0,\ g_y(b) < 0$.
Laut Satz 3.17 $\exists \xi \in (a,b)$ mit $g_y(\xi) = 0 \ \Leftrightarrow f(\xi) = y$. $\square$

Korollar 3.19 (Fixpunktsatz)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. $\exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Beweis: Übung mit Hilfsfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) := f(x) - x$. $\square$

Satz 3.20. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (eigentlich oder *uneingentlich*, d.h. auch $\pm\infty$ als Grenzen erlaubt) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: $f(I) \subset R$ ist (uneingentliches) Intervall.

Beweis: Seien $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wähle $y \in (A, B)$ beliebig. Nach Definition von sup/inf $\exists a, b \in I: \ f(a) < y < f(b)$. Nach Zwischenwertsatz (Korollar 3.18) $\exists x \in (a, b): \ y = f(x) \ \Rightarrow (A, B) \subset f(I) \ \Rightarrow \ f(I) \in \big\{(A, B), [A, B), (A, B], [A, B]\big\}$. □

Satz 3.21 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (möglicherweise uneigentliches) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton. Dann $\exists f^{-1} : f(I) \to I$ und ist stetig.

Beweis: O.E. $f \nearrow$ (sonst betrachte $-f$ statt f) $\Rightarrow f$ ist injektiv $\Rightarrow \exists f^{-1} \nearrow$. Annahme: $\exists y \in f(I)$ mit f^{-1} nicht stetig in $y \ \Rightarrow \ \exists \varepsilon > 0 \ \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(I)$: $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ und $\forall n \in \mathbb{N} \left|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)\right| > \varepsilon$. $\forall n \in \mathbb{N}$ setze $x_n := f^{-1}(y_n) \in I$, $x := f^{-1}(y) \in I$. Da $f^{-1} \nearrow$, $\forall n \in \mathbb{N} \ y < y_n \ \Rightarrow \ x < x + \varepsilon < x_n \ \Rightarrow \ f(x) < f(x + \varepsilon) < f(x_n)$. Analog, $\forall n \in \mathbb{N} \ y_n < y \ \Rightarrow \ x_n < x - \varepsilon < x \ \Rightarrow \ f(x_n) < f(x - \varepsilon) < f(x)$. Also $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $|y_n - y| = \left|f(x_n) - f(x)\right| > \delta := \min\big\{f(x + \varepsilon) - f(x), f(x) - f(x - \varepsilon)\big\} > 0$ — Widerspruch zu $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. □

Bemerkung 3.22. Es ist möglich zu zeigen, dass jede stetige injektive Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist strikt monoton. Dann ist laut Satz 3.21 f^{-1} stetig.

Definition 3.23. Menge $K \subset \mathbb{K}$ ist (folgen-)kompakt $:\Leftrightarrow$ jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$.

Beispiel 3.24.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ K := [a, b]$ ist kompakt in $\mathbb{R}$ (siehe Satz 2.65).
2. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, \infty)$ die abgeschlossene Kreisscheibe $K := \overline{B_r(z_0)} := \big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\big\}$ ist kompakt in $\mathbb{C}$ (siehe Satz 2.90).

Beweis: Laut Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in \mathbb{K}$. Im Fall von $[a, b]$ $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b \ \Rightarrow a \leqslant x \leqslant b$ (Satz 2.41) $\ \Leftrightarrow \ x \in [a, b]$. Im Fall von $\overline{B_r(z_0)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{n_k} - z_0| \leqslant r \ \Rightarrow \ |x - z_0| \leqslant |x - x_{n_k}| + r \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r$ (Satz 2.41) $\ \Leftrightarrow \ x \in \overline{B_r(z_0)}$. □

Satz 3.25. Sei $K \subset \mathbb{K}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h.
$\exists x_\pm \in \mathbb{K}: \ f(x_\pm) = \genfrac{}{}{0pt}{}{\max}{\min}\big\{f(x) : \ x \in K\big\}$.

Beweis: Nur für max, für min betrachte $-f$ statt f. Sei $S := \sup\big\{f(x) : x \in K\big\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Falls $S \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $S - 1/n$ ist keine obere Schranke von $f(K)$ $\Rightarrow$ $\exists x_n \in K :$ $f(x_n) \in (S - 1/n, S]$. Falls $S = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in K :$ $f(x_n) > n$. Also in den beiden Fälle $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = S$. K ist kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $x_+ := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. f ist stetig $\Rightarrow$ $f(x_+) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = S$ $\Rightarrow S \in \mathbb{R}$ und das Maximum ist angenommen. $\square$

Definition 3.26. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $A \subset \mathscr{D}$.

1. f ist *gleichmäßig stetig auf* A $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 :$ $\forall x, x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$ $\Rightarrow$ $\big|f(x) - f(x')\big| < \varepsilon$. (Unterschied zur Stetigkeit: δ hängt nicht von $x, x' \in A$ ab, ist also gleichmäßig in x, x'.).

2. f ist *Lipschitz-stetig auf* A $:\Leftrightarrow$ $\exists C \in (0, \infty)$ $\forall x, x' \in A :$ $\big|f(x) - f(x')\big| \leqslant C|x - x'|$.

Lemma 3.27. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ und $A \subset \mathscr{D}$.
f ist Lipschitz-stetig auf $A \overset{(a)}{\Rightarrow}$ f ist gleichmäßig stetig auf $A \overset{(b)}{\Rightarrow}$ f ist stetig auf A.

Beweis: (a): $\forall \varepsilon > 0$ wähle $\delta := \varepsilon / C$. (b): Übung! $\square$

Satz 3.28. Sei $K \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{K}'$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf K.

Beweis: Annahme: f nicht gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n, x'_n \in K$ mit $(1) :$ $|x_n - x'_n| < 1/n$ und $(2) :$ $\big|f(x_n) - f(x'_n)\big| \geqslant \varepsilon$. K ist kompakt $\Rightarrow$ $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = \xi \overset{(2)}{\Rightarrow} \forall k \in \mathbb{N} :$ $\varepsilon \leqslant \big|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\big| \leqslant \big|f(x_{n_k}) - f(\xi)\big| + \big|f(\xi) - f(x'_{n_k})\big| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Widerspruch zu $\varepsilon > 0$. $\square$

3.5 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

Beispiel 3.29. $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n : x \mapsto x / \big(|x| + 1/n\big)$. Dann $\forall n$ f_n ist stetig, aber $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0; \\ 0, & \text{für } x = 0; \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

wobei $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist keine stetige Funktion!

Definition 3.30. Sei $\mathscr{D} \subset \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$.

1. *Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise gegen* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathscr{D}:\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathscr{D}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}:$ $\forall n \geqslant N$ gilt $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

2. *Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N$ gilt $\sup_{x\in\mathscr{D}} \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

Beispiel 3.31. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionen impliziert die punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht: $(f_n)_{n\to\infty}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen sgn. (Übung!)

Satz 3.32 (Gleichmäßigen Limiten stetiger Funktionen sind stetig)**.** Sei $\mathscr{D} \subset \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$. Dann ist f stetig.

Beweis: Seien $x \in \mathscr{D}$, $\varepsilon > 0$ beliebig. $\forall y \in \mathscr{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(y)\right| + \left|f_n(y) - f(y)\right|$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$, $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall \xi \in \mathscr{D}:\ \left|f_n(\xi) - f(\xi)\right| < \varepsilon/3 \Rightarrow$ für $n := N$ gilt $\left|f(x) - f(y)\right| < 2\varepsilon/3 + \left|f_N(x) - f_N(y)\right|$. f_N ist stetig in $x \Rightarrow \exists \delta = \delta(x, N, \varepsilon) > 0:\ \forall y \in \mathscr{D}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $\left|f_N(x) - f_N(y)\right| < \varepsilon/3 \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon \Rightarrow f$ ist stetig in x. □

4 Potenzreihen und elementare Funktionen

4.1 Reihen (2. Teil)

Erinnerung: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } :\Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy.}$$

Satz 4.1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert in $\mathbb{K} \Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Beweis: Übung! □

Beispiel 4.2. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert, deswegen ist "$\Leftarrow$" in Satz 4.1 nicht möglich.

Definition 4.3. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist *absolut konvergent* (in $\mathbb{K}$) $:\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert (in $\mathbb{R}$).

Satz 4.4. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert $\Rightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geqslant N$ gilt nach Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon,$$

woraus folgt, dass $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. □

Satz 4.5 (Majorantenkriterium)**.** Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, und $\forall k \in \mathbb{N}$ gelte $|a_k| \leqslant c_k$. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert $\Rightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geqslant N$ gilt

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon,$$

woraus folgt, dass $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. □

Beispiel 4.6. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ divergiert absolut (Beispiel 4.2), ist aber konvergent. Für gerade Partialsummen gilt (mit $m \in \mathbb{N}$)

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l} \right) = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)}.$$

Nun $\forall l \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{1}{2l(2l-1)} \leqslant \dfrac{1}{l(l+1)}$, und $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{1}{l(l+1)}$ konvergiert laut Beispiel 2.45 $\Rightarrow$ $(S_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium; $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt $S_{2m+1} = S_{2m} + 1/(2m+1)$, also die Folge *aller* Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Satz 4.7 (Quotientenkriterium)**.** Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, $\theta \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall k \geqslant N$ $a_k \neq 0$ und $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant \theta$. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis: Ohne Einschränkung, $N = 1$ (endlich viele Glieder können die Konvergenz nicht beeinflussen!) $\Rightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}\ |a_{k+1}| \leqslant |a_k|\ \Rightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}\ |a_k| \leqslant \theta^{k-1}|a_1|$. Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta^{k-1}|a_1| = |a_1| \sum\limits_{k=0}^{\infty} \theta^k$ konvergiert (geometrische Reihe, Satz 2.46), folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium (Satz 4.5). $\square$

Bemerkung 4.8. Warnung: Die Bedingung $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall k \geqslant N\ \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ ist *nicht* hinreichend für die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, siehe Beispiel 4.2 (harmonische Reihe).

Beispiel 4.9. $\forall x \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergent, denn nach Definition 2.26 gilt $\exp(0) = 1$ und $\forall k \geqslant |x| \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \leqslant \frac{|x|}{|x|+1} =: \theta \in (0,1).$$

Satz 4.10. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ (später auch für $\alpha \in \mathbb{R}$) konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann wenn $\alpha > 1$ gilt.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $x \mapsto x^n$ strikt monoton wachsend auf $[0,\infty)\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist die Umkehrabbildung $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ strikt monoton wachsend auf $[0,\infty)$. Dann (siehe Definition 2.69) ist die Abbildung $x \mapsto x^\beta$ strikt monoton wachend für $\mathbb{Q} \ni \beta > 0$ und strikt monoton fallend für $\mathbb{Q} \ni \beta < 0$ auf $(0,\infty)$.

1. Fall $\alpha \leqslant 1\ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $n^{1-\alpha} \geqslant 1:\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Wäre die Reihe konvergent, so würde auch die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$ nach dem Majorantenkriterium konvergieren, was laut Beispiel 4.2 aber falsch ist.

2. Fall $\alpha < 1\ \Leftrightarrow\ 1-\alpha < 0\ \Rightarrow 2^{1-\alpha} < 1$: Da alle Summanden positiv sind, ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend. Nach Satz 2.62 genügt es zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen nach oben Beschränkt ist. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_{2^N-1} = \sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n^\alpha}.$$

In der inneren Summe gibt es 2^l Summanden, wobei jeder nicht größer ist, als der erste. Deswegen gilt laut Beispiel 2.25.4

$$S_{2^N-1} \leqslant \sum_{l=0}^{N-1} 2^l \cdot \frac{1}{(2^l)^\alpha} = \sum_{l=0}^{N-1} (2^{1-\alpha})^l = \frac{1-(2^{1-\alpha})^N}{1-2^{1-\alpha}} \leqslant \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}.$$

Damit ist die Menge *aller* Partialsummen nach oben beschränkt.

□

Definition 4.11. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n := \sup\{x_k : k \geqslant n\}$. Dann ist die Folge $\{y_n\} \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ monoton fallend $\Rightarrow$ Es existiert *Limes superior* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Satz 4.12.

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Sei H die Menge aller Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $H \neq \varnothing$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \max H$.
2. Sei $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N\ x_n < \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$.
3. Sei $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}:\ \exists n \geqslant N:\ x_n > \limsup\limits_{n\to\infty} x_n - \varepsilon$.

Beweis: Übung! □

Satz 4.13 (Wurzelkriterium)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Dann gilt:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \ \Rightarrow\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut;
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \ \Rightarrow\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert;
3. Für $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sowohl konvergieren, als auch divergieren.

Beweis:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \ \Rightarrow$ Nach Satz 4.12.2 $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N\ \sqrt[n]{|a_n|} < \theta := \big(1 + \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\big)/2 \in (\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, 1)$. Folglich gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N-1} |a_n| + \sum\limits_{n=N}^{\infty} \theta^n < \infty$.

2. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow$ Nach Satz 4.12.3 es existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} > \theta := \min\left\{2, \left(1 + \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)/2\right\} > 1 \Rightarrow |a_n| > 1$. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert nach Satz 4.1.

3. Siehe Beispiele 4.2 und 4.6. Es wird später bewiesen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = 1$ gilt.

□

Satz 4.14 (von Mertens über das Cauchy-Produkt von Reihen)**.** Seien $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$, eine davon absolut konvergent. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann ist $C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent und für die Summen der Reihen gilt $AB = C$. Falls beide A und B absolut konvergent sind, so ist auch C absolut konvergent.

Beweis: Ohne Einschränkung sei A absolut konvergent. Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien A_N, B_N, C_N die entsprechenden Partialsummen und $\beta_N := B - B_N$. Dann gilt $C_N = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \cdots + a_n b_0) = a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \cdots + a_N B_0 = A_N B - (a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0)$. Um die Konvergenz von $(C_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ zu beschließen, genügt es nun zu zeigen, dass $(\omega_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ mit $\omega_N := \sum_{j=0}^{N} \beta_j a_{N-j}$ eine Nullfolge ist. Dabei sind $(\beta_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Nullfolgen. Deswegen $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall N \geqslant k : |\beta_N| \leqslant \varepsilon/S$; wobei $S := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \in [0, \infty)$. Folglich $\forall N \geqslant k$ gilt $|\omega_N| = \left|\sum_{j=0}^{N} \beta_j a_{N-j}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j||a_{N-j}| + \sum_{j=k}^{N} |\beta_j||a_{N-j}| \Rightarrow \limsup_{N\to\infty} |\ omega_N| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \limsup_{N\to\infty} |a_{N-j}| + \varepsilon = \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ ist beliebig, ist $(\omega_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge, d.h. C konvergiert. Falls beide A und B absolut konvergent sind, wende das bisherigen Resultat auf $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ an. □

4.2 Potenzreihen

Definition 4.15. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt *Potenzreihe* (in $\mathbb{K}$).

Beispiel 4.16. 1. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert $\forall x \in \mathbb{K}$, siehe Beispiel 4.9.

2. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf $B_1 := \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}$ und divergiert für $x \in \mathbb{K} \setminus B_1$ (geometrische Reihe).

3. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ konvergiert nur für $x = 0$, da sonst $(n^n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist (siehe Satz 4.1).

Satz 4.17 (Cauchy-Hadamard)**.** Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$ sei

$$r := \Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1} \in [0, +\infty]$$

der *Konvergenzradius* (mit der formalen Vereinbarung $(+\infty)^{-1} := 0,\ 0^{-1} := +\infty$). Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert absolut auf $B_r = \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ und divergiert auf der Menge $\{x \in \mathbb{K} : |x| > r\}$. In den Sonderfälle $r = 0$ und $r = +\infty$ konvergiert die Reihe nur für $x = 0$ bzw. für alle $x \in \mathbb{K}$.

Beweis: Es gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|/r$. Es bleibt das Wurzelkriterium (Satz 4.13) auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ anzuwenden und die Sonderfälle einzeln zu behandeln. □

Bemerkung 4.18.

1. Für $|x| = r$ kann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sowohl konvergieren, als auch divergieren.

2. Analog zu Satz 4.17 folgen aus dem Quotientenkriterium und Satz 4.12 die hinreichenden Bedingungen (falls $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N\ a_n \neq 0$):

   (a) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \Big(\limsup_{n\to\infty} \big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\big|\Big)^{-1}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut.

   (b) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > \limsup_{n\to\infty} \big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Satz 4.19 (Konvergenzkriterium von Weierstraß)**.** Sei $\mathscr{D} \subset \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathscr{D}} |f_n(x)|$ konvergent. Dann $\exists F : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ sodass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen F, d.h.

1. $\forall x \in \mathscr{D}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert absolut gegen $F(x)$ und

2. Die Funktionenfolge der Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen F im Sinne der Definition 3.30.2.

Beweis:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathscr{D}\ \left|f_n(x)\right| \leqslant \sup_{x\in\mathscr{D}}\left|f_n(x)\right|$. Deswegen konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut nach Majorantenkriterium (Satz 4.5). Wir definieren $F : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ durch $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. $\sup_{x\in\mathscr{D}}\left|F(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| = \sup_{x\in\mathscr{D}} \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_{x\in\mathscr{D}}\left|f_n(x)\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$

□

Satz 4.20. Sei $r > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann $\forall\rho \in (0,r)$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho := \left\{x \in \mathbb{K} : |x| \leqslant \rho\right\}$ gegen die *stetige* Funktion $F : B_r = \left\{x \in \mathbb{K} : |x| < r\right\} \to \mathbb{K}$, $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : B_\rho \to \mathbb{K}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n \ \Rightarrow \sup_{x\in B_\rho}\left|f_n(x)\right| = |a_n|\rho^n$. $\forall\rho \in (0,r)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in B_\rho}\left|f_n(x)\right|$ laut Satz 4.17. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho := \left\{x \in \mathbb{K} : |x| \leqslant \rho\right\}$ gegen F nach Satz 4.19. Laut Satz 3.32 F ist stetig auf $\overline{B}_\rho := \left\{x \in \mathbb{K} : |x| \leqslant \rho\right\}$ for all $\rho \in (0,r) \ \Rightarrow\ F$ ist stetig auf B_r, da $\forall x \in B_r$ gilt $x \in \overline{B}_{(|x|+r)/2}$. □

4.3 Exponentialfunktion

Definition 4.21. *Exponentialfunktion:* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp : z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (siehe Beispiel 4.9).

Satz 4.22.

1. exp ist stetig.

2. $\exp(0) = 1,\ \exp(1) = \mathrm{e} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

3. *Funktionalgleichung:* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} :\ \exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.

4. $\forall z \in \mathbb{C}: \ \exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \big(\exp(z)\big)^{-1}$.

5. $\forall z \in \mathbb{C}: \ \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

6. Insbesondere, $\forall x \in \mathbb{R}: \ \overline{\exp(\mathrm{i}x)} = \exp(-\mathrm{i}x), \ \big|\exp(\mathrm{i}x)\big| = 1$.

Beweis:

1. Satz 4.20, da $r = \infty$.

2. Klar!

3. Nach Cauchy-Produkt (Satz 4.14) $\exp(z_1)\exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$ laut Binomialsatz 2.27.

4. $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $1 = \exp(0) = \exp(z-z) \overset{3.}{=} \exp(z)\exp(-z)$. Daraus folgt $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \big(\exp(z)\big)^{-1}$.

5. $\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \exp(\overline{z})$.

6. folgt aus 5. und 3.: $\big(\exp(\mathrm{i}x)\big)\overline{\big(\exp(\mathrm{i}x)\big)} = \exp(0) = 1$.

□

Satz 4.23 (Reelle Exponentialfunktion)**.**

1. $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist strikt monoton wachsend, bijektiv und stetig.

2. $\exp\big((0,\infty)\big) = (1,\infty)$, d.h. $x > 0 \ \Rightarrow \ \exp(x) > 1$.

3. $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty, \ \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Beweis:

1. $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, da alle Koeffizienten in der Definition reell sind. Sei $x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \exp(x) = \Big(\exp(x/2)\Big)^2 > 0$. Die Stetigkeit folgt aus Satz 4.20. Die strikte Monotonie auf $[0,\infty)$ folgt aus Definition 4.21 und auf $\mathbb{R}$ aus Satz 4.22.4. Die Bijektivität folgt aus dem Zwischenwertsatz und Eigenschaft 3 (Übung!).

2. Sei $x > 0 \ \Rightarrow \ \exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x > 1$.

3. Übung!

□

Korollar 4.24. $\forall z \in \mathbb{C}:\ \exp(z) = \exp(\operatorname{Re} z)\exp(\mathrm{i}\operatorname{Im} z),\ \left|\exp(z)\right| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

Satz 4.25. $\forall q = m/n \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(q) = \mathrm{e}^q$. (Erinnerung: $\mathrm{e}^q = \sqrt[n]{\mathrm{e}^m}$.)

Beweis: $\left[\exp(q)\right]^n = \exp(nq) = \exp(1 \cdot m) = \left[\exp(1)\right]^m = \mathrm{e}^m > 0 \;\Rightarrow\; \exp(q) = \sqrt[n]{\mathrm{e}^m} = \mathrm{e}^q$. □

Definition 4.26. $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{e}^z := \exp(z)$.

4.4 Trigonometrische Funktionen, π und Polardarstellung komplexer Zahlen

Definition 4.27. *Kosinus:* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \cos : z \mapsto \cos z := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2$.
Sinus: $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \sin : z \mapsto \sin z := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(2\mathrm{i})$.

Satz 4.28. $\forall z \in \mathbb{C}$:

1. $\sin, \cos$ sind stetig.
2. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
   Die beiden Reihen konvergieren absolut auf $\mathbb{C}$.
3. $\cos z = \cos(-z),\ \sin z = -\sin(-z);\ \cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$.
4. *Eulersche Formel:* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$.
5. *Pythagoras:* $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (Hier $\sin^2 z := (\sin z)^2$, analog mit anderen Funktionen und deren Potenzen).
6. *Additionstheoreme:* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt
   (a) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
   (b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
   (c) $\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$;
   (d) $\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$.

Beweis:

1. Da exp stetig ist und Summen stetiger Funktionen sind stetig.

2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}$ (die beide Reihen absolut konvergent)
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\big[(\mathrm{i}z)^n + (-\mathrm{i}z)^n\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade;} \\ 2(\mathrm{i}z)^n, & n \text{ gerade} \end{cases} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}^2)^k z^{2k}}{(2k)!}.$

   Dabei gilt für $n, l \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{i}^n = \begin{cases} 1, & n = 4l; \\ \mathrm{i}, & n = 4l+1; \\ -1, & n = 4l+2; \\ -\mathrm{i}, & n = 4l+3. \end{cases}$

   Für sin analog.

3. folgt aus 2.

4. folgt durch einsetzen der Definitionen in die rechte Seite.

5. $\sin^2 z + \cos^2 z = -(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2/4 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2/4 = 1.$

6. Durch Nachrechnen. Z.B. 6a: $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
$= \big[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})\big]/(4\mathrm{i})$
$= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)})/(2\mathrm{i}) = \sin(z_1 + z_2).$

□

Satz 4.29 (Reelle trigonometrische Funktionen)**.**

1. $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ stetig.

2. $\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos x = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},\ \sin x = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$

Beweis:

1. $\sin(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R},\ \cos(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, z.B. aus Satz 4.28.2
$\Rightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}\ \sin^2 x \geqslant 0\ \wedge\ \cos^2 x \geqslant 0 \overset{\text{Satz 4.28.5}}{\Longrightarrow} \sin^2 x \in [0,1]\ \wedge\ \cos^2 x \in [0,1]\ \Leftrightarrow\ |\sin x| \in [0,1]\ \wedge\ |\cos x| \in [0,1].$

2. folgt aus Satz 4.22.6 und Definition 4.27.

□

Lemma 4.30. $\forall x \in (0,2]$ gilt

1. $1 - x^2/2 < \cos x < 1 - x^2/2 + x^4/24;$

2. $x - x^3/6 < \sin x < x.$

Beweis: Übung, folgt aus Satz 4.28.2 durch paarweise Gruppieren der nacheinanderfolgenden Reihenglieder. $\square$

Satz 4.31 (und Definition)**.** $\cos : (0,2] \to \mathbb{R}$ ist strikt monoton fallend. $\exists_1 \xi \in (0,2)$ mit $\cos\xi = 0$. *Kreiszahl* $\pi := 2\xi$ (also $\pi \in (0,4)$).

Beweis: Nach Satz 4.28.3 $\cos 0 = 1$. Nach Lemma 4.30.1 $\cos 2 < 1 - 2 + 16/24 = -1/3 < 0$. Da cos stetig ist, nach dem Nullstellensatz (Satz 3.17) $\exists \xi \in (0,2)$ mit $\cos\xi = 0$. Nach Lemma 4.30.2 $\forall t \in (0,2]$ $\sin t > t(1 - t^2/6) \geqslant t/3 > 0$ $\Rightarrow$ nach Satz 4.28.6d $\forall x, y \in (0,2]$ mit $x > y$ gilt $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0$ $\Rightarrow$ $\cos : (0,2] \to \mathbb{R}$ $\searrow$ $\Rightarrow \xi$ ist eindeutig. $\square$

Satz 4.32. $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$, $\sin(z + \pi/2) = \cos z$;
2. $\cos(z + \pi) = -\cos z$, $\sin(z + \pi) = -\sin z$;
3. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ und 2π ist die kleinste reelle Periode von sin und cos;
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \pi/2 + \pi k$, $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \pi k$.

Beweis: 1.: $\cos(\pi/2) = 0$ (Satz 4.31) $\Rightarrow$ $\left|\sin(\pi/2)\right| = 1$ (Satz 4.28.5) $\Rightarrow$ $\sin(\pi/2) = 1$ (Lemma 4.30.2 und $\pi \in (0,4)$) $\Rightarrow$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \cos(\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/2) = \mathrm{i}$ (Satz 4.28.4) $\Rightarrow$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{e}^{m\mathrm{i}\pi/2} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})^m = \mathrm{i}^m$ (siehe Bemerkung im Beweis von Satz 4.28.2) $\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos(z + \pi/2) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\pi/2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+\pi/2)})/2 = (\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2 = -\sin z$. Die andere Formel aus 1 folgt analog, die Formeln aus 2. und 3. folgen direkt aus 1.
4.: Laut Satz 4.31 $\pi/2$ ist die einzige Nullstelle von cos in $[0,2]$. Wegen Satz 4.28.3 $\pm\pi/2$ sind die einzigen Nullstellen von cos auf $[-2,2]$. Nach 2. $\pm\pi/2$ sind die einzigen Nullstellen von cos auf $[-\pi/2, 3\pi/2)$. Nun folgt 4. für cos aus 3. Jetzt implizieren 4. und 2., dass 2π die kleinste Periode von cos ist. Die entsprechenden Aussagen über sin folgen aus 1. $\square$

Satz 4.33.

1. $2\pi\mathrm{i}$ ist kleinste imaginäre Periode von exp, insbesondere $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$.
2. Mit wachsendem $x \in [0, 2\pi)$ durchläuft $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ genau einmal den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ entgegen dem Uhrzeigersinn.

Beweis: Sätze 4.31 und 4.32 und die Eulersche Formel (Satz 4.22.4). $\square$

Korollar 4.34 (Polardarstellung komplexer Zahlen).
$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists_1 r \geqslant 0\ \exists \varphi \in \mathbb{R}:\ z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Es gilt

1. $r = |z|$ ist der Betrag von z.
2. Für $z \neq 0$, φ (*Phase* oder *Argument* von z) ist eindeutig bis auf Addition von $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Für $z = 0$ gilt $r = 0$ und φ ist beliebig. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \Rightarrow$ nach Satz 4.33 $\exists_1 \varphi_0 \in [0, 2\pi):\ z/|z| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$. □

Definition 4.35 (Hauptzweig des Arguments). Die Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi],\ \arg : z \mapsto \arg z := \varphi$ ist nach Korollar 4.34 wohldefiniert. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$.

Korollar 4.36 (Multiplikation in Polardarstellung). Für $j \in \{1, 2\}$ seien $z_j = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$ mit $r_j \in [0, \infty)$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$. Dann gilt $z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$. “Beträge multiplizieren, Argumente addieren”.

Korollar 4.37. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt genau n Lösungen in $\mathbb{C}$ (n-te Einheitswurzeln): für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ $z_k := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}$.

4.5 Logarithmus und allgemeine Potenz

Satz 4.38 (und Definition). Sei $\mathbb{C}_L := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die *links geschlitzte komplexe Ebene* und $S := \{z \in \mathbb{C} :\ -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ *offener Horizontalstreifen der Breite* 2π. Dann gilt: $\exp : S \to \mathbb{C}_L$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion heißt *Hauptzweig des (natürlichen) Logarithmus:* $\ln : \mathbb{C}_L \to S$ (auch: log, Log, Ln).

Beweis: Sei $z \in S$. Laut Korollar 4.24 gilt $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} z}$. Nach Satz 4.23.1 ist die Abbildung $\operatorname{Re} z \mapsto \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$ von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$ bijektiv. Auch bijektiv ist die Abbildung $\operatorname{Im} z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} z}$ von $(-\pi, \pi)$ nach $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\right\} \setminus \{-1\}$, siehe Satz 4.33. Die Behauptung folgt nun aus Korollar 4.34. □

Satz 4.39 (Funktionalgleichung des ln). Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_L$ mit $z_1 z_2 \in \mathbb{C}_L$. Dann $\exists_1 k \in \mathbb{Z}:\ \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2\pi\mathrm{i}k$.

Beweis: Für $j \in \{1, 2\}$ $\exists_1 \zeta_j \in S$ mit $z_j = \mathrm{e}^{\zeta_j}$ (Satz 4.38), d.h. $\zeta_j = \ln z_j$. Laut Satz 4.22.3, $z := z_1 z_2 = \mathrm{e}^{\zeta_1 + \zeta_2} = \mathrm{e}^{\zeta_1 + \zeta_2 + 2\pi\mathrm{i}k}$, wobei $\exists_1 k \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{Im}(\zeta_1 + \zeta_2 + 2\pi\mathrm{i}k) \in (-\pi, \pi)$. Dann gilt $\ln z = \zeta_1 + \zeta_2 + 2\pi\mathrm{i}k$. □

Korollar 4.40. [Reeller Logarithmus] $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv mit der stetigen, strikt monoton wachsenden Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)$ gilt $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

Beweis: Sätze 4.23, 3.21 und 4.39. □

Korollar 4.41. $\forall z \in \mathbb{C}_L$ gilt $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$ und $\ln : \mathbb{C}_L \to S$ ist stetig.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus Definition 4.35 und Satz 4.39. Die Stetigkeit von $\ln|\cdot| : \mathbb{C}_L \to \mathbb{R}$ folgt aus Satz 3.14, Beispiel 3.15 und Korollar 4.40. Stetigkeit von $\arg : \mathbb{C}_L \to (-\pi, \pi)$: Übung! □

Definition 4.42 (Allgemeine Potenz)**.** Für $a \in \mathbb{C}_L$ und $z \in \mathbb{C}$ setze $a^z := \exp(z \ln a)$.

Bemerkung 4.43. $\forall a \in \mathbb{C}_L$ die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto a^z \in \mathbb{C}$ ist stetig und konsistent mit den Definitionen 2.69 und 4.26.

Satz 4.44.

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} z_1| < \pi$ gilt $(\mathrm{e}^{z_1})^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 z_2}$.

2. $\forall z_1 \in \mathbb{C}_L\ \forall z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^{z_2} \in \mathbb{C}_L\ \exists_1 k \in \mathbb{Z}:\ \ln(z_1^{z_2}) = z_2 \ln z_1 + 2\pi \mathrm{i} k$.

Beweis: Übung! □

5 Differenzieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

5.1 Ableitung

Im folgenden stets: $\mathscr{D} \subset \mathbb{R},\ \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 5.1. Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, sei $a \in \mathscr{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$.

1. f *differenzierbar in* a :⇔ (1.) Ableitung von f in a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) := f'(a) := \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert.

2. Falls $a \in \mathscr{D}$ Häufungspunkt von $\mathscr{D} \cap [a, \infty)$, f ist *von rechts differenzierbar in* a :⇔ $f'_+(a) := \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert. Analog: von links differenzierbar, f'_-.

3. Sei $A \subset \mathscr{D}$ mit $\forall a \in A$ gilt: a ist Häufungspunkt von $\mathscr{D}$. f *ist differenzierbar auf* A :⇔ $\forall a \in A$ gilt: f differenzierbar in a mit *(1.) Ableitung von* f *auf* A: $f' : A \to \mathbb{K}'$, $f' : a \mapsto f'(a)$ (auch $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$).

4. f ist *differenzierbar* :⇔ f ist differenzierbar auf $\mathscr{D}$.

Bemerkung 5.2.

1. Sei $a \in \mathscr{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$, $g : \{x : x + a \in \mathscr{D}\} \to \mathbb{K}'$, $g : h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ gilt: f differenzierbar in a $\Leftrightarrow$ $f'(a) = \lim_{h\to 0} g(h)$ existiert.
2. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist kein Quotient, nur Notation!
3. *Geometrische Interpretation für* $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$: $f'(a)$ ist Steigung der Tangente an Graphen von f im Punkt a.

Beispiel 5.3.

1. *Konstante Funktion*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto c \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R} :$ $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{c - c}{x - a} = 0$.
2. *Monom*: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R} :$ $f'(a) = na^{n-1}$, da $f(a+h) - f(a) = (a+h)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k a^{n-k}$ (Satz 2.27) $\Rightarrow$ $\big(f(a+h) - f(a)\big)/h = \binom{n}{1} a^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k} \xrightarrow[h\to 0]{} na^{n-1}$.
3. Exponentialfunktion: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dann $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $f'(a) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda a} = \lambda f(a)$. Insbesondere:

   (a) $\exp' = \exp$ (setze $\lambda := 1$);

   (b) $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ (setze $\lambda := \mathrm{i}, \sin x$).

   Beweis: $\forall h \neq 0 :$ $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \mathrm{e}^{\lambda a} \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda h} - 1}{h} = \mathrm{e}^{\lambda a} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^n h^{n-1}}{n!} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda a} g(h)$ mit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda x)^n}{(n+1)!}$. Die Potenzreihe konvergiert $\forall x \in \mathbb{C}$ (Quotientenkriterium!) $\Rightarrow$ der Konvergenzradius ist ∞ $\Rightarrow$ g ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Satz 4.20) $\Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = 1$.
4. Der Betrag $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber nicht in 0. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \operatorname{sgn}(x)$. Es existieren aber die Ableitungen in 0 von links ($= -1$) und rechts ($= 1$).

Definition 5.4 (Höhere Ableitungen)**.** Seien $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, $x \in \mathscr{D}$, $A \subset \mathscr{D}$. Induktive Definitionen für $k \in \mathbb{N}$:

1. falls $\exists \varepsilon > 0$, sodass $f^{(0)} := f,\ f^{(1)} := f', \dots, f^{(k-2)}$ differenzierbar auf $\mathscr{D} \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ und $f^{(k-1)}$ differenzierbar in x, setze $f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x)$ die *k-te Ableitung von f in x*;

2. f ist *k-mal differenzierbar (auf A)* $:\Leftrightarrow\ f^{(0)}, \dots, f^{(k-1)}$ differenzierbar (auf A).

3. f ist *k-mal stetig differenzierbar (auf A)* $:\Leftrightarrow\ f^{(0)}, \dots, f^{(k-1)}$ differenzierbar (auf A) und $f^{(k)}$ ist stetig.

Bemerkung 5.5. Notation: $\forall k \in \mathbb{N}: \quad f^{(k)} =: \dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} =: \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f =: \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k f = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(k-1)}$.

Beispiel 5.6.

1. $\forall k \in \mathbb{N}: \ \exp^{(k)} = \exp$;

2. $\sin'' = -\sin,\ \cos'' = -\cos$.

Satz 5.7 (Lineare Approximierbarkeit)**.** Sei $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$, $a \in \mathscr{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathscr{D}$. Dann gilt: f ist differenzierbar in $a \ \Leftrightarrow\ \exists m \in \mathbb{K}',\ \delta > 0$ und $\varphi : \mathscr{D} \cap (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{K}'$ mit $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi(x)}{x-a} = 0$, sodass $\forall x \in \mathscr{D} \cap (a-\delta, a+\delta)$ $f(x) = f(a) + m(x-a) + \varphi(x)$. In diesem Fall gilt $f'(a) = m$.

Beweis: „ $\Rightarrow$": Setze $m := f'(a)$, $\delta > 0$ beliebig und $\forall x \in \mathscr{D}$ $\varphi(x) := f(x) - f(a) - m(x-a) \ \Rightarrow\ \forall x \in \mathscr{D} \setminus \{a\}$ gilt $\dfrac{\varphi(x)}{x-a} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - m \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
„ $\Leftarrow$": $\forall x \in \mathscr{D} \cap (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ gilt: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \dfrac{\varphi(x)}{x-a} \ \Rightarrow\ f$ ist differenzierbar in a mit $f'(a) = m$. $\square$

Bemerkung 5.8.

1. Die lineare Approximierbarkeit gilt als Definition der Differenzierbarkeit in allgemeineren Situationen.

2. Es gilt $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \left((x-a)\dfrac{\varphi(x)}{x-a}\right) = 0$.

Korollar 5.9.

1. f ist differenzierbar in $a \ \Rightarrow\ f$ ist stetig in a.

2. f ist k-mal stetig differenzierbar für ein $k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$ $f^{(j)}$ ist stetig.

5.2 Ableitungsregeln

Satz 5.10. Sei $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D}$, $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}'$ differenzierbar in x.

1. *Linearität der Ableitung*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}'$ ist $\lambda f + \mu g$ differenzierbar in x und $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$.
2. *Produktregel*: fg ist differenzierbar in x und $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. *Quotientenregel*: Sei $g(x) \neq 0$, dann ist f/g differenzierbar in x und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$.

Beweis:

1. Folgt aus Satz 2.37.
2. Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in \mathscr{D}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)\big(g(x+h) - g(x)\big) + \big(f(x+h) - f(x)\big)g(x)}{h}$
$= \big(\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)\big) \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$, siehe Korollar 5.9 und Bemerkung 5.2.
3. Da $g(x) \neq 0$ und g differenzierbar in x, nach Korollar 5.9 und Satz 3.16 $\exists \delta > 0 : \ \forall y \in \mathscr{D} \cap (x-\delta, x+\delta) : \ g(y) \neq 0$. Sei $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$, $x+h \in \mathscr{D}$ (also $g(x+h) \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \frac{1}{g(x+h)}\frac{1}{g(x)}\frac{g(x) - g(x+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{-g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{g}$ ist differenzierbar in x mit $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$. Nun laut Produktregel gilt $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

□

Beispiel 5.11.

1. Für $\mathscr{D} := \mathbb{C} \setminus \big\{(k + 1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$ setze *Tangens* $\tan : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\tan z := \sin z / \cos z$. Nach Quotientenregel $\tan : \mathscr{D} \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ ist differenzierbar mit $\tan'(x) = \frac{(\cos x)\cos x - (\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-n}$ gilt: f ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^n} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. Zusammen mit Beispiel 5.3 bedeutet das: $\forall n \in \mathbb{Z} :\ (x^n)' = nx^{n-1}$.

Satz 5.12 (Kettenregel)**.** Seien $\mathscr{D}_f, \mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R},\ g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. Sei f differenzierbar in $x \in \mathscr{D}_f$ und g differenzierbar in $f(x) \in \mathbb{D}_g$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x mit $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$.

Beweis: Laut Satz 5.7 $\exists \varphi : \mathscr{D}_f - x \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, sodass $\forall h$ mit $x + h \in \mathscr{D}_f$ gilt $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varphi(h)$.
Fall $f'(x) = 0$: Für $\varphi(h) = 0$ gilt $\frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h} = 0$. Sonst
$\frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h} = \frac{g\big(f(x) + \varphi(h)\big) - g\big(f(x)\big)}{\varphi(h)}\frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} g'\big(f(x)\big) \cdot 0 = 0.$
Fall $f'(x) \neq 0$: $\forall h \in \mathscr{D}_f - x$ mit $|h| > 0$ klein genug gilt: $f(x+h) - f(x) = h\big(f'(x) + \varphi(h)/h\big) \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{}$
$g'\big(f(x)\big)f'(x)$. □

Satz 5.13. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (ggf. uneigentliches) Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton, differenzierbar in $x \in I$ mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $f(x)$ und $(f^{-1})'\big(f(x)\big) = 1/f'(x) \ \Leftrightarrow\ $ für $y := f(x)$ gilt $(f^{-1})'(y) = 1/f'\big(f^{-1}(y)\big)$.

Beweis: Sei $\mathscr{D}' := f(I) \subset \mathbb{R}$, dann $f^{-1} : \mathscr{D}' \to I$ existiert. Sei $y := f(x)$ und $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $y + \eta \in \mathscr{D}'$. Sei $h(\eta) := f^{-1}(y+\eta) - x \neq 0$ (da $\eta \neq 0$ und f injektiv), dann $f\big(x + h(\eta)\big) = f(x) + \eta$. Nach Satz 3.21 f^{-1} ist stetig $\Rightarrow$
$h(\eta) \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0 \ \Rightarrow\ \frac{f^{-1}(y+\eta) - f^{-1}(y)}{\eta} = \left(\frac{f\big(x + h(\eta)\big) - f(x)}{h(\eta)}\right)^{-1} \xrightarrow[\eta\to 0]{} \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$
□

Beispiel 5.14.

1. Da $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von exp, nach Satz 5.13 gilt: ln ist differenzierbar und $\forall y \in (0,\infty)\ \ \ln'(y) = 1/\exp(\ln y) = 1/y$.

2. Ableitung von $x \mapsto x^z$ auf $\mathscr{D} = (0,\infty)$ mit $z \in \mathbb{C}$. Laut Definition 4.42 gilt $x^z = \mathrm{e}^{z\ln x} = g(\ln x)$ mit $g : y \mapsto \mathrm{e}^{zy}$. Nach Kettenregel gilt $(x^z)' = g'(\ln x)\ln' x = zx^z/x = zx^{z-1}$.

5.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

In diesem Abschnitt sind alle Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 5.15. Seien $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathscr{D}$.

1. f hat *lokales Maximum* (bzw. lokales Minimum) in ξ $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \cap \mathscr{D}$: $f(\xi) \geqslant f(x)$ $\big($bzw. $f(\xi) \leqslant f(x)\big)$ $\Leftrightarrow:$ ξ ist *Maximalstelle* (bzw. Minimalstelle) von f;

2. falls $\forall x \in \big((\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \setminus \{\xi\}\big) \cap \mathscr{D}$ sogar $f(\xi) > f(x)$ gilt, heißt ξ ein *striktes lokales Maximum* (bzw. Minimum).

3. *Extremum* ist Minimum oder Maximum.

Satz 5.16. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\xi \in (a, b)$ lokales Extremum von f und f differenzierbar in ξ. Dann gilt: $f'(\xi) = 0$.

Beweis: O.E. sei x Maximalstelle (für Minimum analog!). Dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass $\forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) : f(\xi) \geqslant f(x) \Rightarrow \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi) : \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqslant 0 \wedge \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon) : \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0$. Da f ist differenzierbar in ξ, $f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim\limits_{x \nearrow \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim\limits_{x \searrow \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0$. □

Bemerkung 5.17.

1. $f'(\xi) = 0$ ist *nicht hinreichend* für ein lokales Extremum. Beispiel: $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ und $\xi = 0$.

2. Die Behauptung von Satz 5.16 gilt nicht für die Randpunkte. Beispiel: Identitätsabbildung auf $[0, 1]$ und $\xi \in \{0, 1\}$.

Satz 5.18 (Rolle)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f differenzierbar auf (a, b). Dann $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Beweis: Der Fall der Konstantfunktion ist trivial. Sonst $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. O.E. sei $f(x_0) > f(a)$ (Fall "$<$" analog!). Satz 3.25 $\Rightarrow$ $\exists \xi \in [a, b]$ mit $\forall x \in [a, b]$ $f(\xi) \geqslant f(x)$. Da $f(x_0) > f(a)$, $\xi \in (a, b)$. Nun folgt die Behauptung aus Satz 5.16. □

Korollar 5.19 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Verallgemeinerung: Sei g eine Funktion, die die gleichen Eigenschaften wie f hat und $\forall x \in (a, b)$ $g'(x) \neq 0$. Dann $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$.

Beweis: Sei $\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$ für $x \in [a,b]$. Dann φ ist stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b); $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$. Laut Satz 5.18 $\exists \xi \in (a,b)$ mit $0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. □

Satz 5.20. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

1. (a) $\forall x \in (a,b)\ f'(x) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ f \nearrow$;
   (b) $\forall x \in (a,b)\ f'(x) > 0 \ \Rightarrow\ f$ ↗ (streng);
   (c) $\forall x \in (a,b)\ f'(x) \leqslant 0 \ \Rightarrow\ f \searrow$;
   (d) $\forall x \in (a,b)\ f'(x) < 0 \ \Rightarrow\ f$ ↘ (streng);
2. (a) $f \nearrow\ \Rightarrow\ \forall x \in (a,b)\ f'(x) \geqslant 0$;
   (b) $f \searrow\ \Rightarrow\ \forall x \in (a,b)\ f'(x) \leqslant 0$.

   Keine extra Aussagen für f ↗ (streng) oder f ↘ (streng), betrachte $f(x) := x^3$ auf $[0,1]$.

Beweis: Übung! □

Satz 5.21. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\xi \in (a,b)$. Sei f zweimal differenzierbar in ξ, $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$ (bzw. < 0). Dann hat f in ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis: O.E. Fall $0 < f''(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} \ \Rightarrow\ \exists \varepsilon > 0 :\ (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subset (a,b)$ und $\forall x \in (\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon) \setminus \{\xi\}$ gilt $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$. Da $f'(\xi) = 0$, $\forall x \in (\xi, \xi+\varepsilon)\ f'(x) > 0$ und $\forall x \in (\xi-\varepsilon, \xi)\ f'(x) < 0 \ \Rightarrow\ f$ ↘ (streng) auf $(\xi-\varepsilon,\xi)$ und f ↗ (streng) auf $(\xi,\xi+\varepsilon)$ $\Rightarrow$ striktes lokales Minimum in ξ. □

Bemerkung 5.22. Im Gegensatz zu Satz 5.16 gibt Satz 5.21 eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für ein lokales Extremum. Beispiel: $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^4$ und $\xi = 0$.

Satz 5.23 (Regeln von de l'Hospital)**.** Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\forall x \in (a,b)$ gilt $g'(x) \neq 0$. Es sei entweder

1. $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\searrow a} g(x)$ oder
2. $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x\searrow a} g(x) = \pm\infty$.

Falls $\lim\limits_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gilt $\lim\limits_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Analog für Limiten $x \nearrow b$.

Beweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$:
Fall 1: Sei $\tilde{f} : \big[a, (a+b)/2\big] \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in \big(a, (a+b)/2\big]$ und $\tilde{f}(a) := 0$, analog $\tilde{g}$. Laut Korollar 5.19 $\forall x \in \big(a, (a+b)/2\big)$ $\exists \xi_x \in (a, x)$, sodass $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Im Limes $x \searrow a \;\Rightarrow\; \xi_x \searrow a$ folgt die Behauptung.
Fall 2 folgt aus Fall 1 mittels $\check{f} := 1/f$, $\check{g} := 1/g$. Limes $x \nearrow b$ analog.
Limiten $x \to \pm\infty$ folgen mit $\check{f}(x) := f(\pm 1/x)$, $\check{g}(x) := g(\pm 1/x)$ aus dem Limes $x \searrow 0$. $\square$

Beispiel 5.24. Mit $\mathscr{D} := (0, \infty)$ $\forall \alpha > 0$ gilt

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$. *Beweis:* $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \infty$, differenzierbar auf $\mathscr{D}$. Ferner gilt $\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha} = \dfrac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Nun folgt die Behauptung aus Satz 5.23.

2. $\lim\limits_{x\searrow 0}(x^\alpha \ln x) = 0$. *Beweis:* Folgt aus 1. mittels $y := 1/x$ und $\ln(1/y) = -\ln y$.

6 Integrieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Im ganzen Kapitel: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$.

6.1 Riemann-integrierbare Funktionen

Definition 6.1.

1. $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist eine *Treppenfunktion* $:\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ und Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ von I, sodass $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists c_j \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in (x_{j-1}, x_j)$ $\varphi(x) = c_j$. (Die Werte $\varphi(x_j)$ mit $j \in \{0, \ldots, n\}$ sind nicht vorgegeben.)

2. $\mathcal{T}(I) := \{\varphi : I \to \mathbb{R}, \varphi \text{ Treppenfunktion}\}$.

3. *(Riemann-)Integral von* $\varphi \in \mathcal{T}(I)$: $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x := \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})$.

Lemma 6.2.

1. $\mathcal{T}(I)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2. $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Unterteilung von φ.

3. Linearität: $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)\big)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x$.

4. Monotonie: $\forall \varphi \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi(x) \geqslant 0$ (d.h. $\forall x \in I$ $\varphi(x) \geqslant 0$) gilt $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Definition 6.3. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

1. *Oberintegral*: $\mathcal{O}_I(f) := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x : \ \varphi \in \mathcal{T}(I), \varphi \geqslant f \right\}$.
   Unterintegral: $\mathcal{U}_I(f) := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x : \ \varphi \in \mathcal{T}(I), \varphi \leqslant f \right\}$.

2. *f ist Riemann-integrierbar* (über I) $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_I(f) = \mathcal{U}_I(f) =: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x =: \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

3. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind Riemann-integrierbar. Setze $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b (\operatorname{Re} f)(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b (\operatorname{Im} f)(x)\mathrm{d}x$.

Bemerkung 6.4.

1. Seien $m_\pm \in \mathbb{R}$ mit $m_- \leqslant f \leqslant m_+$. Dann mit $|I| := b - a$ gilt $m_-|I| \leqslant \mathcal{U}_I(f) \leqslant \mathcal{O}_I(f) \leqslant m_+|I|$.

2. Alle $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ sind integrierbar mit $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \mathcal{O}_I(\varphi) = \mathcal{U}_I(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})$.

3. $1_\mathbb{Q} := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nicht Riemann-integrierbar über $I := [0,1]$. Es gilt $\mathcal{O}_I(1_\mathbb{Q}) = 1$, mit inf realisiert durch Konstantfunktion 1, da $\mathbb{Q}$ dich in $\mathbb{R}$ liegt; $\mathcal{U}_I(1_\mathbb{Q}) = 0$, mit sup realisiert durch Konstantfunktion 0, da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dich in $\mathbb{R}$ liegt.

4. Name der Integrationsvariablen ist irrelevant: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Definition 6.5. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

1. Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung von I und $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ seien $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ *Stützstellen*.

2. *Zerlegung* (von I): $\mathcal{Z} := \big((x_j)_{j \in \{0,\dots,n\}}, (\xi_j)_{j \in \{0,\dots,n\}}\big)$ (Unterteilung mit Stützstellen).

3. *Feinheit der Zerlegung*: $\mu(\mathcal{Z}) := \max\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}} (x_j - x_{j-1})$.

4. *Riemann-Approximante* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$: $\varphi_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{T}(I)$ mit $\forall j \in \{1,\ldots,n\}: \; c_j := f(\xi_j)$.

5. *Riemann-Summe* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$: $\mathcal{R}(\mathcal{Z}, f) := \int_a^b \varphi_{\mathcal{Z}}(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$.

Satz 6.6. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

1. f ist Riemann-integrierbar;

2. $\exists J \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \mathcal{Z}$ Zerlegung mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta : \; \left| J - \mathcal{R}(\mathcal{Z}, f) \right| < \varepsilon$;

3. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \varphi_{\pm} \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+$ und $\int_a^b \varphi_+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_-(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

Trifft eine der Aussagen 1. – 3. zu, so gilt $J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Korollar 6.7. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist integrierbar.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Laut Satz 3.28 und Beispiel 3.24.1 f ist gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 : \; \forall x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon / \big(2(b-a)\big)$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (b-a)/\delta$. Für $j \in \{1,\ldots,N\}$ sei $I_j := \big[(j-1)(b-a)/N, j(b-a)/N\big)$, $c_j^+ := \sup\limits_{x\in I_j} f(x)$, $c_j^- := \inf\limits_{y\in I_j} f(y)$ und $\varphi_{\pm} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall j \in \{1,\ldots,N\}$ $\forall x \in I_j$ $\varphi^{\pm}(x) := c_j^{\pm}$, $\varphi^{\pm}(b) := 0$. Dann gilt $\varphi_{\pm} \in \mathcal{T}(I)$, $\varphi_- \leqslant f \leqslant \varphi_+$ und $\forall j \in \{1,\ldots,N\}$ $c_j^+ - c_j^- = \sup\limits_{x\in I_j} f(x) - \inf\limits_{y\in I_j} f(y) < \varepsilon/(b-a)$, da $\forall x, y \in I_j$ gilt $|x-y| < (b-a)/N < \delta$. $\Rightarrow$ $\int_a^b \varphi_+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_-(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{j=1}^{N} (c_j^+ - c_j^-)(b-a)/N < \sum\limits_{j=1}^{N} \varepsilon/N = \varepsilon$.
Die Behauptung folgt nun aus Satz 6.6. $\square$

6.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 6.8. Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1. *Linearität*: $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und
$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2. *Monotonie*: $f \leqslant g \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3. *Dreiecksungleichung*: $|f| : I \to [0, \infty)$ ist Riemann-integrierbar und $\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

4. *Additivität*: Seien $a < c < b$. Dann sind äquivalent:

   (a) f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$,

   (b) f ist Riemann-integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$.

   Gilt eine der beiden Aussagen, so gilt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Definition 6.9. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0$; für $b < a$ und f Riemann-integrierbar auf $[b,a]$ sei $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Satz 6.10 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Seien $f,g : I \to \mathbb{R}$ stetig ($\Rightarrow$ Riemann-integrierbar nach Korollar 6.7) mit $g \geqslant 0$.
Dann $\exists \xi \in I:\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
Speziell für $g := 1$ gilt: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Beweis: Seien $m := \inf\{f(x) : x \in I\}$, $M := \sup\{f(x) : x \in I\}$. Wegen $g \geqslant 0$ gilt $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow$ nach Korollar 3.18 (für die Abbildung $h : [m,M] \to \mathbb{R},\ h : y \to y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$) $\exists \mu \in [m,M]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Wegen Stetigkeit von f implizieren Satz 3.25 und Korollar 3.18, dass $\exists \xi \in I$ mit $\mu = f(\xi)$. $\square$

Satz 6.11 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)**.** Seien $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, $x_0 \in I$ und $F : I \to \mathbb{C}$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$. Dann ist F differenzierbar und $F' = f$.

Beweis: Es genügt $f : I \to \mathbb{R}$ zu behandeln (Betrachte $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$). Seien $x \in I,\ h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, sodass $x+h \in I$. Dann nach Sätze 6.8.4, 6.10 $\exists \xi_h \in [x, x+h]$ mit $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_h) \underset{\xi_h \to x}{\xrightarrow{h\to 0}} f(x)$. $\square$

Definition 6.12. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, $F : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar. F ist *Stammfunktion zu* $f :\Leftrightarrow\ F' = f$.
Schreibweisen: $F =: \int f =: \int f(x)\mathrm{d}x;\ F(x) =: \int^x f =: \int^x f(t)\mathrm{d}t$.

Satz 6.13. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F. Differenzierbare Funktion $G : I \to \mathbb{C}$ ist auch Stammfunktion zu $f \ \Leftrightarrow\ F - G = \text{const}$.

Beweis: „ $\Leftarrow$": $0 = F' - G' = f - G'$.
„ $\Rightarrow$": $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$. Nach Satz 5.20 sind $\operatorname{Re}(G-F)$ und $\operatorname{Im}(G-F)$ sowohl $\nearrow$ als auch $\searrow$, daher konstant. $\square$