

Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Es sei die Potenzreihe

$$(1) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

für $|z| < 1$ konvergent und beschränkt. Es existiere also eine Konstante M , so daß

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für } |z| < 1.$$

Sei zunächst $M = 1$; bekanntlich ist dann (Landausche Ungleichung)¹⁾

$$(2) \quad |a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2\nu} \right)^2 \quad ^1)$$

und (Fejérsche Ungleichung)

$$(3) \quad |(n+1)a_0 + na_1 + \dots + a_n| \leq n+1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)^2).$$

¹⁾ Man vgl. z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, §§ 1, 2.

²⁾ L. Fejér, Rend. del Circ. Matem. di Palermo 38 (1914), S. 79—97, insb. S. 95. — Herr Steffensen (ebenda 38, S. 382) fand — unter der unwesentlichen Voraussetzung: $a_0 = 0$ —

$$|s_0 + s_1 + \dots + s_n| < \frac{\epsilon}{2} \cdot (n+1).$$

Man vgl. auch Landau, a. a. O. ¹⁾, S. 9.

Übrigens ergibt sich — worauf mich Herr Fejér aufmerksam machte — (3) schon aus einer älteren Fejérschen Formel (Math. Annalen 58 (1904), S. 51—69, insb. S. 54); demnach ist

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n} = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \left(\frac{\sin n \frac{\alpha-x}{2}}{\sin \frac{\alpha-x}{2}} \right)^2 d\alpha,$$

wo $s_0(x), s_1(x), \dots$ die Partialsummen der Fourierreihe von $F(x)$ bezeichnen.

Oder wenn zur Abkürzung

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = s_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gesetzt wird,

$$|s_n| \leq \sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{\nu}\right)^2$$

und

$$(F) \quad |s_0 + s_1 + \dots + s_n| \leq n + 1.$$

Es ist auch bekannt, daß in (2) Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn

$$f(z) \equiv e^{\gamma z} \frac{z^n \sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{\nu}\right) \left(-\frac{1}{z}\right)^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^n \left(-\frac{1}{\nu}\right) (-z)^{\nu}} \quad (\gamma \text{ eine reelle Konstante});$$

und es ist leicht einzusehen, daß in (3) Gleichheit nur im Falle

$$f(z) \equiv e^{\gamma z}$$

gilt.

In Weiterverfolgung des Landauschen Ideenganges leite ich diese Resultate aus einer gemeinsamen Quelle ab, die ich auch zur Aufstellung anderer Relationen ähnlichen Charakters benutze. Nachträglich habe ich indessen die Arbeit mit Rücksicht auf eine inzwischen erschienene Abhandlung des Herrn I. Schur an mehreren Stellen abgeändert³⁾.

§ 1.

Satz I. Zwei $n + 1$ -gliedrige Zahlenfolgen

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

seien durch die Identität miteinander verbunden:

$$(4) \quad (\lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n)^2 = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_n z^n + \dots,$$

Hieraus folgt leicht

$$\frac{n a_0 + (n-1) a_1 r + \dots + a_{n-1} r^{n-1}}{n} = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\alpha}) \left(\frac{\sin n \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 d\alpha \quad (0 < r < 1);$$

also

$$\left| \frac{n a_0 + (n-1) a_1 r + \dots + a_{n-1} r^{n-1}}{n} \right| \leq \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin n \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 d\alpha \stackrel{!}{=} 1 \quad (0 < r < 1);$$

hieraus ergibt sich (3) unmittelbar.

³⁾ Man vgl. I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für Mathematik 147 (1917), S. 205–232. Vgl. weiter unten die §§ 1, 2 und 6 meiner Arbeit. Insbesondere verdankt § 6 seine Entstehung der Schurschen Arbeit.

das heißt, es sei

$$(5) \quad \lambda_0 \lambda_\nu + \lambda_1 \lambda_{\nu-1} + \dots + \lambda_\nu \lambda_0 = \mu_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, n);$$

ferner genüge die Potenzreihe (1) der Bedingung

$$(6) \quad \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \right| \leq 1 \text{ für } |z| < 1.$$

Dann ist

$$(L) \quad |\mu_n a_0 + \mu_{n-1} a_1 + \dots + \mu_0 a_n| \leq |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2.$$

Hat die Gleichung

$$(7) \quad P(z) \equiv \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n = 0$$

keine Wurzel im Kreise $|z| < 1$, so tritt in L auch Gleichheit auf, und zwar nur im Falle

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z + \dots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n}.$$

Unter $\bar{\lambda}_\nu$ ist hierbei die zu λ_ν konjugiert komplexe Zahl zu verstehen.

Den Beweis führte ich zuerst in Anlehnung an die von Herrn Landau zum Beweise seiner Ungleichheit (2) benutzte Methode, die dem Falle $\mu_0 = 1, \mu_1 = 1, \dots, \mu_n = 1$ entspricht. Um zu zeigen, daß in (L) nur für die Funktion (8) Gleichheit gilt, mußte ich jedoch einen tiefliegenden Fatouschen Satz über beschränkte Potenzreihen anwenden. Herr J. Schur, dem mein Manuskript vorgelegen hat, machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß sich der Satz einfacher unter Zuhilfenahme einer Ungleichung ableiten läßt, die er in einer inzwischen erschienenen Arbeit gab. Ich führe nun auf diesem Wege den Beweis des Satzes und leite der Vollständigkeit halber auch die zu benutzende Schursche Ungleichung (a. a. O. ³), S. 227) in Kürze ab.

Setzt man

$$f(z)P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu z^\nu,$$

so daß also

$$a_0 \lambda_\nu + a_1 \lambda_{\nu-1} + \dots + a_\nu \lambda_0 = v_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, n)$$

$$a_k \lambda_n + a_{k+1} \lambda_{n-1} + \dots + a_{k+n} \lambda_0 = v_{k+n} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

so wird bekanntlich für $0 \leq \varrho < 1$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 \varrho^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\alpha}) P(\varrho e^{i\alpha})|^2 d\alpha.$$

Vermöge der Bedingung (6) folgt hieraus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_{\nu}|^2 e^{2\nu} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\alpha})|^2 d\alpha = \sum_{\nu=1}^n |\lambda_{\nu}|^2 e^{2\nu},$$

also ist auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_{\nu}|^2$ konvergent und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_{\nu}|^2 \leq \sum_{\nu=0}^n |\lambda_{\nu}|^2,$$

und schließlich

$$(9) \quad \sum_{\nu=0}^n |v_{\nu}|^2 \leq \sum_{\nu=0}^n |\lambda_{\nu}|^2.$$

Dies ist die Schursche Ungleichung. Damit hier Gleichheit gilt, muß jedenfalls die Beziehung bestehen:

$$v_{\nu} = 0 \quad \text{für } \nu = n + 1, n + 2, \dots$$

Nun ist offenbar

$$\begin{aligned} \mu_n a_0 + \mu_{n-1} a_1 + \dots + \mu_0 a_n &= \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} (a_0 \lambda_{n-\nu} + a_1 \lambda_{n-\nu-1} + \dots + a_{n-\nu} \lambda_0) \\ &= \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} v_{n-\nu}, \end{aligned}$$

also

$$(10) \quad |\mu_n a_0 + \dots + \mu_0 a_n| \leq \sum_{\nu=0}^n |\lambda_{\nu} v_{n-\nu}| \leq \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{2} (|\lambda_{\nu}|^2 + |v_{n-\nu}|^2),$$

und schließlich mit Rücksicht auf (9):

$$(L) \quad |\mu_n a_0 + \mu_{n-1} a_1 + \dots + \mu_0 a_n| \leq |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2.$$

Damit hier Gleichheit gilt, muß offenbar in den Beziehungen (9) und (10) die Gleichheit bestehen, es müssen also folgende Bedingungen erfüllt sein:

- 1) $v_{\nu} = 0$ für $\nu = n + 1, n + 2, \dots$;
- 2) die Zahlen $\lambda_{\nu} v_{n-\nu}$ ($\nu = 0, \dots, n$) haben dieselbe Amplitude, das heißt, es gibt eine Konstante r , so daß

$$\lambda_{\nu} v_{n-\nu} = r_{\nu} e^{r\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n), \quad r_{\nu} \geq 0;$$

$$3) \quad |\lambda_{\nu}| = |v_{n-\nu}| \quad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Aus 2) und 3) folgt $|\lambda_{\nu}|^2 = r_{\nu}$, also aus 2) für $\lambda_{\nu} \neq 0$:

$$v_{n-\nu} = \bar{\lambda}_{\nu} e^{r\nu};$$

dies gilt wegen 3) auch für $\lambda_{\nu} = 0$.

Es ist demnach

$$f(z)P(z) = e^{\gamma i}(\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1}z + \dots + \bar{\lambda}_0 z^n),$$

oder

$$f(z) = e^{\gamma i} \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1}z + \dots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n}.$$

Liegen die Wurzeln von (7) außerhalb oder auf dem Rande des Einheitskreises, so ist auch klar, daß diese Funktion der Bedingung (6) genügt, denn es ist $|f(e^{i\alpha})| \equiv 1$; man sieht auch unmittelbar, daß jetzt in (9) und in (L) Gleichheit gilt.

Damit ist der Satz I bewiesen.

§ 2.

Aus Satz I ergibt sich leicht der folgende Satz von Schur [a. a. O. ³], Satz X]:

Satz A. Die Potenzreihe (1) ist dann und nur dann für $|z| < 1$ konvergent und beschränkt, wenn die Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{\nu \leq \mu} a_{\mu-\nu} x_{\nu} y_{\mu}$$

beschränkt ist. Die obere Grenze der Potenzreihe ist genau gleich der oberen Grenze der Bilinearform.

Ist nämlich $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ für $|z| < 1$ konvergent und daselbst $|f(z)| \leq 1$, so besagt die Ungleichung (L), daß die quadratische Form der komplexen Variablen $\lambda_0, \dots, \lambda_n$:

$$K_n(\lambda, \lambda) = \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} (a_0 \lambda_{n-\nu} + a_1 \lambda_{n-\nu-1} + \dots + a_{n-\nu} \lambda_0)$$

für $\sum_{\nu=0}^n |\lambda_{\nu}|^2 = 1$ die obere Schranke 1 besitzt; also hat auch die Bilinearform

$$K_n(k, \lambda) = \sum_{\nu=0}^n k_{\nu} (a_0 \lambda_{n-\nu} + a_1 \lambda_{n-\nu-1} + \dots + a_{n-\nu} \lambda_0)$$

für $\sum_{\nu=0}^n |k_{\nu}|^2 = 1$ und $\sum_{\nu=0}^n |\lambda_{\nu}|^2 = 1$ die obere Schranke Eins ⁴). Ersetzt man hier k_{ν} durch $y_{n-\nu}$ und λ_{ν} durch x_{ν} , so erhält man für $\sum_{\nu=0}^n |x_{\nu}|^2 \leq 1$ und $\sum_{\nu=0}^n |y_{\nu}|^2 \leq 1$:

⁴) Dies folgt sofort aus der Beziehung:

$$K_n(k, \lambda) = \frac{1}{2} [K_n(k + \lambda, k + \lambda) - K_n(k - \lambda, k - \lambda)].$$

Man vgl. E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unend-

$$\left| \sum_{\nu=0}^n y_{n-\nu} (a_0 x_{n-\nu} + a_1 x_{n-\nu-1} + \dots + a_{n-\nu} x_0) \right| \leq 1,$$

das heißt

$$(11) \quad \left| \sum_{\nu \leq \mu \leq n} a_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu \right| \leq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ist umgekehrt (11) erfüllt, so erhält man zunächst für $x_0 = 1, y_n = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$:

$$|a_n| \leq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

also $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ konvergiert für $|z| < 1$. Ferner folgt aus (11) für $x_\nu = e^{-\nu\alpha i}, y_\mu = e^{(\mu-n)\alpha i}$

$$\left| \sum_{\nu \leq \mu \leq n} a_{\mu-\nu} e^{(\mu-\nu)\alpha i} \right| \leq n + 1,$$

oder

$$|(n+1)a_0 + na_1 e^{\alpha i} + \dots + a_n e^{n\alpha i}| \leq n + 1,$$

das heißt

$$|s_0 + s_1(e^{\alpha i}) + \dots + s_n(e^{\alpha i})| \leq n + 1;$$

also ist

$$\left| \frac{s_0 + s_1(z) + \dots + s_n(z)}{n+1} \right| \leq 1 \quad \text{für } |z| < 1,$$

und da

$$\frac{s_0 + s_1(z) + \dots + s_n(z)}{n+1} \rightarrow f(z) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

so ist auch

$$(6') \quad |f(z)| \leq 1 \quad \text{für } |z| < 1.$$

Aus Satz I kann man noch einen weiteren Schluß ziehen. Damit unter der Bedingung (6') schon der n -te Abschnitt der Bilinearform $A(x, y)$ die obere Grenze 1 erreicht, das heißt

$$(12) \quad \left| \sum_{0 \leq \nu \leq \mu \leq n} a_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu \right| = \sqrt{\sum_{\nu=0}^n |x_\nu|^2} \sqrt{\sum_{\nu=0}^n |y_\nu|^2}$$

wird für ein geeignetes Wertesystem $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$|K_n(\lambda, \lambda)| = \sum_{\nu=0}^n |\lambda_\nu|^2$$

wird. Das heißt in (L) muß Gleichheit gelten, also ist

lichen Matrizen, *Mathem. Annalen* 69 (1910), S. 289—330 (§ 4, S. 303—304). Die hier für reelle quadratische Formen angestellte Überlegung läßt sich sofort auf quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten übertragen.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = e^{r i} \frac{\bar{\lambda}_n + \dots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \dots + \lambda_n z^n},$$

und es ist ersichtlich, daß jetzt in (12) für $x_{\nu} = \lambda_{\nu}$, $y_{\nu} = \lambda_{n-\nu}$ Gleichheit gilt.

Ist nun $\lambda_0 = 0$, so muß auch $\lambda_n = 0$ sein (da sonst $f(z)$ für $z = 0$ einen Pol hätte), und dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = e^{r i} \frac{\bar{\lambda}_{n-1} + \dots + \bar{\lambda}_1 z^{n-1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} z^{n-1}};$$

also würde schon der $(n-1)$ -te Abschnitt $A_{n-1}(x, y) = \sum_{\nu \leq \mu \leq n-1} a_{\mu-\nu} x_{\nu} y_{\mu}$ die

obere Grenze 1 erreichen. Damit also n der kleinste Index sei, für den $A_n(x, y)$ die obere Grenze 1 erreicht, muß $\lambda_0 \neq 0$ sein. Die Funktion $f(z)$ läßt sich dann offenbar in der Form schreiben:

$$f(z) = e^{r i} \prod_{\nu=1}^n \frac{z + w_{\nu}}{1 + \bar{w}_{\nu} z}, \quad |w_{\nu}| \leq 1.$$

Wäre ferner etwa $|w_n| = 1$, also $\bar{w}_n = \frac{1}{w_n}$, so wäre

$$f(z) = e^{r i} w_n \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{z + w_{\nu}}{1 + \bar{w}_{\nu} z},$$

also würde wiederum schon A_{n-1} die Grenze 1 erreichen. Damit ist der Satz bewiesen:

Satz B. Es bezeichne M_n die obere Grenze der Bilinearform $A_n(x, y)$, dann ist offenbar $M_n \leq M_{n+1}$ und nach Satz A entweder $M_{\nu} < 1$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), oder $M_0 < M_1 < \dots < M_{n-1} < 1$, $M_n = M_{n+1} = \dots = 1$. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(z)$ von der Form ist:

$$(13) \quad f(z) = e^{r i} \prod_{\nu=1}^n \frac{z + w_{\nu}}{1 + \bar{w}_{\nu} z}, \quad |w_{\nu}| < 1.$$

Verzichtet man auf die in Satz B enthaltene Ergänzung, so läßt sich Satz A auf kurzem, direktem Wege folgendermaßen beweisen:

Offenbar ist bei Integration über den Kreis $|z| = \rho$ in positivem Sinne

$$(C) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} dz = \begin{cases} a_{\nu} & \text{für } \nu = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für } \nu = -1, -2, \dots; \end{cases}$$

hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned}
 A_n(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z} \left(\sum_{\nu, \mu=0}^n \frac{x_\nu y_\mu}{z^{\mu-\nu}} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z} \left(\sum_{\nu=0}^n x_\nu z^\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^n \frac{y_\nu}{z^\nu} \right) dz.
 \end{aligned}$$

Nach Einführung der Substitution $z = \varrho e^{i\alpha}$ folgt hieraus

$$A_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\alpha}) \left(\sum_{\nu=0}^n x_\nu \varrho^\nu e^{i\nu\alpha} \right) \left(\sum_{\nu=0}^n y_\nu \varrho^{-\nu} e^{-i\nu\alpha} \right) d\alpha,$$

und es ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}
 |A_n(x, y)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^n x_\nu \varrho^\nu e^{i\nu\alpha} \right| \left| \sum_{\nu=0}^n y_\nu \varrho^{-\nu} e^{-i\nu\alpha} \right| d\alpha \\
 &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left| \sum_{\nu=0}^n x_\nu \varrho^\nu e^{i\nu\alpha} \right|^2 + \left| \sum_{\nu=0}^n y_\nu \varrho^{-\nu} e^{-i\nu\alpha} \right|^2 \right\} d\alpha \\
 &\leq \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\nu=0}^n |x_\nu|^2 \varrho^{2\nu} + \sum_{\nu=0}^n |y_\nu|^2 \varrho^{-2\nu} \right\}.
 \end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 1$ erhält man nun hieraus

$$|A_n(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n \{ |x_\nu|^2 + |y_\nu|^2 \},$$

also

$$(11') \quad |A_n(x, y)| \leq 1 \quad \text{für} \quad \sum_{\nu=0}^n |x_\nu|^2 \leq 1, \quad \sum_{\nu=0}^n |y_\nu|^2 \leq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Wie umgekehrt aus (11') unmittelbar (6') folgt, ist auf S. 168 gezeigt worden.

Die Sätze A und B lassen sich auch so formulieren (man vgl. Schur a. a. O. 3), S. 226–227):

1. Es ist dann und nur dann $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$, wenn die Hermitesche Form

$$\xi = E - \bar{A}^T A = \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2 - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_{\nu+\mu} \right|^2$$

nicht negativ ist.

2. Die nichtnegative Hermitesche Form ξ ist vom Range n stets und nur dann, wenn $f(z)$ vom Typus (13) ist.

Herr Schur hat außerdem bewiesen (a. a. O. Satz X*):

3. Die Hermitesche Form ξ ist dann und nur dann nicht negativ, wenn ihre Abschnittsdeterminanten $\delta_1, \delta_2, \dots$ entweder sämtlich positiv

(> 0) sind, oder wenn die n ersten unter ihnen positiv, die folgenden alle Null sind. Notwendig und hinreichend für das Eintreten des zweiten Falles ist, daß $f(z)$ vom Typus (13) ist. Die Zahl n gibt hierbei zugleich den Rang der Hermiteschen Form ξ an.

Für Punkt 1 selbst (mit Verzicht darauf, die Bedeutung des Ranges der Form ξ und das Verhalten der Determinanten δ_r zu charakterisieren) gab Herr Schur auch einen kurzen direkten Beweis, der sich auf seine Ungleichung (9) stützt. Ich zeige, daß sich hieraus auch Punkt 2 direkt ableiten läßt.

Die Ungleichung (9) lautet ausführlich geschrieben:

$$\sum_{\nu=0}^n |a_0 \lambda_\nu + a_1 \lambda_{\nu-1} + \dots + a_\nu \lambda_0|^2 \leq \sum_{\nu=0}^n |\lambda_\nu|^2,$$

führen wir hier nach Herrn Schur die Bezeichnungen ein:

$$\lambda_0 = u_n, \quad \lambda_1 = u_{n-1}, \quad \dots, \quad \lambda_n = u_0,$$

so erhalten wir

$$(9') \quad \sum_{\nu=0}^n |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \dots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leq \sum_{\nu=0}^n |u_\nu|^2,$$

und wir haben nur zu entscheiden, wann hier bei passender Wahl der u_ν Gleichheit gilt. Hierzu ist notwendig (vgl. § 1, S. 165—166), daß

$$a_k u_0 + a_{k+1} u_1 + \dots + a_{k+n} u_n = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

sei, und es ist dann

$$(b_1) \quad f(z) = \frac{\sum_{\nu=0}^n v_\nu z^\nu}{\sum_{\nu=0}^n u_{n-\nu} z^\nu},$$

wobei

$$v_{n-\nu} = a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \dots + a_{n-\nu} u_n \quad (\nu = 0, 1, \dots, n)$$

ist. Soll nun die Funktion $f(z)$ der Bedingung (6') genügen, so muß sie offenbar innerhalb und auf dem Rande des Einheitskreises regulär sein, und wir können die Beziehung aufstellen

$$\sum_{\nu=0}^n |v_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{\alpha i}) \sum_{\nu=0}^n u_{n-\nu} e^{\nu \alpha i} \right|^2 d\alpha \leq \sum_{\nu=0}^n |u_\nu|^2.$$

Es ist ersichtlich, daß hier Gleichheit nur dann gilt, wenn

$$(b_2) \quad |f(e^{\alpha i})| \equiv 1$$

ist. Aus den Bedingungen (b_1) und (b_2) folgt nun nach einem bekannten Satz, daß $f(z)$ vom Typus (13) ist⁵⁾.

Umgekehrt ist klar, daß für eine Funktion $f(z)$ vom Typus (13) in (9') bei passender Wahl der u_r Gleichheit gilt.

§ 3.

Eine leichte Verallgemeinerung der Relation (L) ergibt sich folgendermaßen. Es seien

$$w_1, w_2, \dots, w_p$$

die p -ten Einheitswurzeln, also

$$w_r^p = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, p),$$

und es sei r eine positive ganze Zahl zwischen den Grenzen

$$0 \leq r \leq p - 1.$$

Dann folgt aus (6):

$$\frac{1}{p} \left| \sum_{r=1}^p w_r^{p-r} (a_0 + a_1 w_r z + a_2 w_r^2 z^2 + \dots) \right| \leq 1 \quad (|z| < 1),$$

also

$$|a_r z^r + a_{r+p} z^{r+p} + a_{r+2p} z^{r+2p} + \dots| \leq 1 \quad (|z| < 1),$$

und hieraus nach einem bekannten Schwarzschen Lemma

$$|a_r + a_{r+p} z^p + a_{r+2p} z^{2p} + \dots| \leq 1 \quad (|z| < 1),$$

also schließlich

$$|a_r + a_{r+p} z + a_{r+2p} z^2 + \dots| \leq 1 \quad (0 \leq r \leq p - 1, \quad |z| < 1).$$

Daher ist nach Satz I

$$|\mu_n a_r + \mu_{n-1} a_{r+p} + \dots + \mu_0 a_{r+np}| \leq \sum_{r=0}^n |\lambda_r|^2;$$

damit hier Gleichheit gilt, muß offenbar nach (8).

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{r+rp} z^r \equiv e^{\gamma z} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z + \dots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n}$$

⁵⁾ Dies ist eine unmittelbare Folge des Schwarzschen Spiegelungsprinzips aus der Theorie der analytischen Fortsetzungen. Man vgl. auch T. H. Gronwall, On Analytic Functions of Constant Modulus on a given Contour, Annals of Mathematics (2) 14 (1912—1913), S. 72—80 (§ 3). Einen andern, gleichfalls sehr einfachen Beweis hat mir Herr Fejér brieflich mitgeteilt. — Speziell für ganze Funktionen $f(z)$ vgl. auch O. Blumenthal, Sur le mode de croissance des fonctions entières, Bulletin de la Société mathématique de France 35 (1907), S. 213—232 (S. 214—215).

sein; also ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{r+\nu p}|^2 = 1$. Andererseits ist aber infolge der Bedingung (6): $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}|^2 \leq 1$; hieraus folgt

$$a_{\nu} = 0 \quad \text{für } \nu \not\equiv r \pmod{p}.$$

Es ist also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{r+\nu p} z^{r+\nu p} = e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z^p + \dots + \bar{\lambda}_0 z^{np}}{\lambda_0 + \lambda_1 z^p + \dots + \lambda_n z^{np}}$$

und es gilt der

Satz I'. Unter den gleichen Voraussetzungen, wie in Satz I ist

$$|\mu_n a_r + \mu_{n-1} a_{r+p} + \dots + \mu_0 a_{r+np}| \leq \sum_{\nu=0}^n |\lambda_{\nu}|^2$$

für $0 \leq r < p$, und Gleichheit gilt nur im Falle

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z^p + \dots + \bar{\lambda}_0 z^{np}}{\lambda_0 + \lambda_1 z^p + \dots + \lambda_n z^{np}}.$$

§ 4.

Betrachten wir nun einige spezielle Fälle der Theoreme I und I', die sich durch eine besondere Wahl der μ_{ν} ergeben.

Es ist offenbar für beliebige reelle oder komplexe Werte von k

$$(1-z)^{-2k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{-2k}{\nu} z^{\nu} = 1 + 2kz + \frac{2k(2k+1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots,$$

und

$$(1-z)^{-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{-k}{\nu} z^{\nu} = 1 + kz + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots$$

Setzt man also

$$\mu_{\nu} = (-1)^{\nu} \binom{-2k}{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

so ist

$$\lambda_{\nu} = (-1)^{\nu} \binom{-k}{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots);$$

wird noch zur Abkürzung

$$a_n - \binom{-2k}{1} a_{n-1} + \dots + (-1)^n \binom{-2k}{n} a_0 = S_n^{(2k-1)}$$

gesetzt, so folgt aus Satz I:

Unter der Bedingung (6) ist

$$(14) \quad |S_n^{(2k-1)}| \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{-k}{\nu}^2.$$

Bekanntlich sind die Größen

$$s_n^{(2k-1)} = \frac{\Gamma(2k)}{n^{2k-1}} S_n^{(2k-1)} \quad (k > \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

die Cesàroschen Mittel $(2k-1)$ -ter Ordnung der Folge s_0, s_1, s_2, \dots . Für reelle $k > \frac{1}{2}$ ist nun nach (14)

$$\begin{aligned} |s_n^{(2k-1)}| &\leq \frac{\Gamma(2k)}{n^{2k-1}} \left[1 + k^2 + \frac{k^2(k+1)^2}{(2!)^2} + \dots + \frac{k^2(k+1)^2 \dots (k+n-1)^2}{(n!)^2} \right] \\ &< \frac{\Gamma(2k)}{n^{2k-1}} \left[1 + \sum_{\nu=1}^n \nu^{2k-2} \right] < c_k, \end{aligned}$$

also unterhalb einer von k abhängigen Konstante.

Für $\frac{1}{2} < k < 1$ zeigte dies schon Herr Landau⁶⁾.

Aus Satz I folgt ferner, daß für reelles k und $0 \leq k \leq 1$ in (14) Gleichheit gilt, falls $f(z)$ die Gestalt hat

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \equiv e^{\gamma z} \frac{z^n P\left(\frac{1}{z}\right)}{P(z)},$$

wobei

$$P(z) = 1 + kz + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{k(k+1) \dots (k+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} z^n;$$

denn nach einem Kakeyaschen Satz [vgl. z. B. Landau, a. a. O.¹⁾, § 2, S. 20] hat das Polynom $P(z)$ keine Nullstelle im Kreise $|z| < 1$ (seine Koeffizienten sind niemals wachsende positive Zahlen).

$$\text{Für } k = \frac{1}{2} \text{ ist } \mu_{\nu} = 1, \quad \lambda_{\nu} = (-1)^{\nu} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu},$$

$$\text{für } k = 1 \text{ ist } \mu_{\nu} = \nu + 1, \quad \lambda_{\nu} = 1,$$

und man erhält die in der Einleitung zitierten Resultate.

Analoge Relationen erhält man aus Satz I'; insbesondere folgt für $k = \frac{1}{2}$:

$$(15) \quad |a_r + a_{r+p} + \dots + a_{r+np}| \leq 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)^2}{2 \cdot 4 \dots 2\nu} \right)^2,$$

wobei aber $r < p$ vorausgesetzt ist.

Herr Fabry hat bei beliebigem r und p eine obere Schranke für den linksseitigen Ausdruck angegeben, und Herr Landau hat Fabrys Resultat auf kürzerem Wege abgeleitet⁷⁾.

⁶⁾ Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe, Archiv der Mathematik und Physik (3) 21 (1913), S. 42—50 und S. 250—255; (3) 24 (1916), S. 250—260 (Dritte Abhandlung, S. 252—253, 257—259).

⁷⁾ a. a. O. ⁶⁾, Erste Abhandlung, §§ 3—4.

§ 5.

Ich gebe hier noch eine etwas allgemeinere Relation an als die unter (14). Die allgemeinen Kugelfunktionen sind die Koeffizienten der Entwicklung

$$(16) \quad (1 - 2xz + z^2)^{-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}^{(k)}(x) z^{\nu} \quad (P_0^{(k)}(x) = 1).$$

$P_{\nu}^{(k)}(x)$ ist eine ganze rationale Funktion von x , die für $k = \frac{1}{2}$ in das Legendresche Polynom übergeht. Nun ist ersichtlich, daß für $\mu_{\nu} = P_{\nu}^{(k)}(x)$, $\lambda_{\nu} = P_{\nu}^{(\frac{k}{2})}(x)$ ist.

Also ist unter der Bedingung (6)

$$(17) \quad \left| a_0 P_n^{(k)}(x) + a_1 P_{n-1}^{(k)}(x) + \dots + a_n \right| \leq \sum_{\nu=0}^n P_{\nu}^{(\frac{k}{2})}(x) |^2.$$

Um die rechte Seite dieser Ungleichung abzuschätzen, sei

$$-1 \leq x \leq 1,$$

und man setze

$$x = \cos \varphi;$$

dann ist offenbar

$$\begin{aligned} (1 - 2xz + z^2)^{-k} &= (1 - ze^{i\varphi})^{-k} (1 - ze^{-i\varphi})^{-k} \\ &= \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{-k}{\nu} e^{i\nu\varphi} z^{\nu} \right] \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{-k}{\nu} e^{-i\nu\varphi} z^{\nu} \right]. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man^{*)}

$$\begin{aligned} P_{\nu}^{(k)}(\cos \varphi) &= (-1)^{\nu} \left[\binom{-k}{\nu} e^{i\nu\varphi} + \binom{-k}{\nu-1} \binom{-k}{1} e^{(i\nu-2)\varphi} \right. \\ &\quad \left. + \binom{-k}{\nu-2} \binom{-k}{2} e^{(i\nu-4)\varphi} + \dots + \binom{-k}{\nu} e^{-i\nu\varphi} \right]; \end{aligned}$$

für $k > 0$ haben im Klammerausdruck sämtliche Koeffizienten dasselbe Vorzeichen $(-1)^{\nu}$, also ist

$$|P_{\nu}^{(k)}(\cos \varphi)| \leq |P_{\nu}^{(k)}(1)| \quad (k > 0);$$

nun erhält man aus (16) für $x = 1$:

$$P_{\nu}^{(k)}(1) = (-1)^{\nu} \binom{-2k}{\nu},$$

*) Für die Legendreschen Polynome ($k = \frac{1}{2}$) findet sich diese Entwicklung schon bei Laplace, und Legendre schloß daraus, daß $|P_{\nu}^{(\frac{1}{2})}(\cos \varphi)| \leq 1$. Man vergleiche E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen (1. Auflage), Berlin 1861, S. 7—8.

also folgt aus (17)

$$\left| a_0 P_n^{(k)}(x) + a_1 P_{n-1}^{(k)}(x) + \dots + a_n \right| \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{-k}{\nu}^2 \quad (k > 0)^9.$$

Hieraus folgt (14) für $x = 1$. Nur in diesem Falle kann Gleichheit gelten.

Für $k = 1$ erhält man

$$(18) \quad \left| \frac{a_0 \sin(n+1)\varphi + a_1 \sin n\varphi + \dots + a_n \sin \varphi}{\sin \varphi} \right| \leq n + 1;$$

nun kann man überall a_ν durch $a_\nu e^{\nu\varphi i}$ ersetzen, denn mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ genügt auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu\varphi i} z^\nu$ der Bedingung (6); man erhält so aus (18)

$$\left| \frac{a_0 \sin(n+1)\varphi + a_1 e^{\varphi i} \sin n\varphi + \dots + a_n e^{n\varphi i} \sin \varphi}{\sin \varphi} \right| \leq n + 1,$$

und hieraus folgt durch Multiplikation mit $e^{-n\varphi i}$

$$(19) \quad \left| \frac{a_0 e^{n\varphi i} \sin(n+1)\varphi + a_1 e^{(n-1)\varphi i} \sin n\varphi + \dots + a_n \sin \varphi}{\sin \varphi} \right| \leq n + 1.$$

Da aber

$$e^{\nu\varphi i} \cdot \frac{\sin(\nu+1)\varphi}{\sin \varphi} = 1 + e^{2\varphi i} + \dots + e^{2\nu\varphi i},$$

so findet man aus (19)

$$(20) \quad |s_0 + s_1 e^{\varphi i} + \dots + s_n e^{n\varphi i}| \leq n + 1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der Formel (F) (S. 164); Gleichheit gilt

nur für $\varphi = 0$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = e^{\nu i}$.

§ 6.

Aus (20) erhält man für $n = 1$:

$$|s_0| + |s_1| \leq 2,$$

und Gleichheit gilt nur für $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \equiv e^{\nu i}$. Man kann nun die Frage

stellen: ist unter der Bedingung (6) stets

$$(21) \quad |s_0| + |s_1| + \dots + |s_n| \leq n + 1. \quad {}^{10)}$$

⁹⁾ Diese Ungleichung gilt übrigens auch für $k < 0$.

¹⁰⁾ Für Fourierreihen haben sich mit der Summe $|s_0| + |s_1| + \dots + |s_n|$ schon die Herren Hardy und Littlewood in ihrer Arbeit, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, C. R. 156 (1913), S. 1307—1309, im Zusammenhange mit dem

Der Beweis dieser Ungleichung wurde von Herrn Schur erbracht und ergibt sich aus seinem Beweisgang für einen allgemeineren Satz¹¹⁾ folgendermaßen: es ist

$$f(z)(1+z+\dots+z^n) = s_0 + s_1 z + \dots + s_n z^n + \dots,$$

also für $0 \leq \varrho < 1$

$$\begin{aligned} & |s_0|^2 + |s_1|^2 \varrho^2 + \dots + |s_n|^2 \varrho^{2n} + \dots \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\alpha})(1 + \varrho e^{i\alpha} + \dots + \varrho^n e^{in\alpha})|^2 d\alpha \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + \varrho e^{i\alpha} + \dots + \varrho^n e^{in\alpha}|^2 d\alpha = 1 + \varrho^2 + \dots + \varrho^{2n}; \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich für $\varrho \rightarrow 1$

$$(22) \quad |s_0|^2 + |s_1|^2 + \dots + |s_n|^2 \leq n + 1.$$

Damit hier Gleichheit gilt, muß offenbar

$$f(z) = \frac{s_0 + s_1 z + \dots + s_n z^n}{1 + z + \dots + z^n}$$

sein, und $s_0 + s_1 z + \dots + s_n z^n$ muß dieselben Nullstellen besitzen, wie $1 + z + \dots + z^n$, also

$$s_0 + s_1 z + \dots + s_n z^n = \alpha_0 (1 + z + \dots + z^n),$$

und hieraus

$$(23) \quad |\alpha_0| = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots$$

Die Ungleichung (21) ist in (22) enthalten; denn es ist offenbar

$$|s_\nu| \leq \frac{1}{2} |s_\nu|^2 + \frac{1}{2},$$

also

$$|s_0| + \dots + |s_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n |s_\nu|^2 + \frac{1}{2}(n+1) \leq n+1,$$

und Gleichheit gilt nur im Falle (23).

§ 7.

Die Relation (15) legt die *Frage* nahe: Welches ist für *beliebige* r und p die genaue obere Schranke von $|a_r + a_{r+p} + \dots + a_{r+np}|$ unter

Fejérschen Summabilitätssatz beschäftigt. Man vgl. auch: Fekete, „Vizsgálatok a Fourier-sorokról, Matematikai és természettudományi Értesítő“ 34 (1916), S. 759 bis 786, und Fejér, Fourierreihe und Potenzreihe, Monatshefte für Mathematik und Physik 28 (1917), S. 64–76.

¹¹⁾ J. Schur, a. a. O. ⁸⁾, S. 227, Ungleichung (26). — Man erhält offenbar (22) aus Ungleichung (9) des § 1 für $\lambda_\nu = 1$.

der Bedingung (6)? Die gesuchte Zahl sei mit $G(r, n, p)$ bezeichnet. Wollen wir diese Frage mit Hilfe des Satzes I beantworten, so haben wir vor allem zu

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = 1, \dots, \mu_n = 1, \mu_{n+1} = 0, \dots, \mu_{n+k} = 0 \quad (k \geq 1)$$

die zugehörigen λ_r zu bestimmen, also die Koeffizienten der Entwicklung

$$(1 + z + \dots + z^n)^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r z^r.$$

Dies gelingt leicht für den Fall $n = 1$; es ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r z^r &= \sqrt{1+z} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{r} z^r = 1 + \frac{1}{2}z + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{2} \\ &\quad \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2r-3)}{4 \cdot 6 \dots 2r} z^r. \end{aligned}$$

Ich zeige jetzt, daß

$$(24) \quad \sum_{r=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{r} z^r \neq 0 \quad \text{für } |z| < 1.$$

Offenbar ist für $0 < \varrho < 1$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{r} (-\varrho)^r = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{r} \right| \varrho^r = \sqrt{1-\varrho} > 0,$$

also

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{r} \right| \varrho^r < 1 \quad \text{für } 0 < \varrho < 1.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{r=1}^{k+1} \left| \binom{\frac{1}{2}}{r} \right| < 1,$$

also ist für $|z| < 1$

$$\left| \sum_{r=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{r} z^r \right| \geq 1 - \sum_{r=1}^{k+1} \left| \binom{\frac{1}{2}}{r} \right| > 0.$$

Damit ist (24) bewiesen. Also gilt nach Satz I' (für $n = k + 1$) der

Satz II. *Unter der Voraussetzung (6) ist*

$$(25) \quad |a_t + a_{t+p}| \leq \sum_{r=0}^{k+1} \binom{\frac{1}{2}}{r}^2 \quad (t = r + kp, \quad r < p, \quad k > 0, \quad p = 1, 2, \dots),$$

und Gleichheit gilt nur für

$$(26) \quad \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r \equiv e^{\gamma t} z^r \cdot \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k+1} + \binom{\frac{1}{2}}{k} z^p + \dots + z^{(k+1)p}}{1 + \frac{1}{2}z^p + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{k+1} z^{(k+1)p}}.$$

Es ist also

$$G(t, 1, p) = \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{1}{\nu}^2, \quad t \geq p, \quad k = \left[\frac{t}{p} \right].$$

Dagegen hat man für $t < p$ also $k = 0$ aus (15):

$$(27) \quad |a_r + a_{r+p}| \leq \frac{5}{4} \quad (0 \leq r < p)$$

und Gleichheit gilt nur für

$$(28) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = e^{\gamma i} z^r \cdot \frac{\frac{1}{2} + z^p}{1 + \frac{1}{2} z^p} = e^{\gamma i} \left(\frac{1}{2} z^r + \frac{3}{4} z^{r+p} + \dots \right).$$

Es ist also allgemein $G(t, 1, p) = \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{1}{\nu}^2, \quad k = \left[\frac{t}{p} \right].$

Ich zeige, daß in (25) und (27) die linke Seite durch die Summe der absoluten Beträge ersetzt werden darf. Dies folgt sofort, wenn man a_{ν} durch $a_{\nu} e^{\gamma \nu i}$ ersetzt, wo γ beliebig ist. Es gelten also die Ungleichungen:

$$|a_t| + |a_{t+p}| \leq \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{1}{\nu}^2 \left(k - \left[\frac{t}{p} \right] \right) \geq 0, \quad p = 1, 2, \dots$$

und im Falle (26) gilt sicher Gleichheit.

§ 8.

Aus (15) folgt für $n = 2$:

$$|a_r + a_{r+p} + a_{r+2p}| \leq \frac{89}{64} \quad (r < p),$$

und Gleichheit gilt nur im Falle

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = e^{\gamma i} \frac{\frac{3}{8} + \frac{1}{2} z + z^2}{1 + \frac{1}{2} z + \frac{3}{8} z^2}.$$

Ich bestimme jetzt die genaue obere Schranke von

$$|a_r + a_{r+p} + a_{r+np}| \quad (n > 2, \quad r < p).$$

Zu diesem Zwecke bestimme ich die zu

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \dots, \quad \mu_{n-2} = 0, \quad \mu_{n-1} = 1, \quad \mu_n = 1$$

gehörigen λ_{ν} , also die ersten $n + 1$ Koeffizienten der Entwicklung

$$(1 + z^{n-1} + z^n)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu} z^{\nu}.$$

Offenbar ist

$$1 + z^{n-1} + z^n = (1 + \frac{1}{2} z^{n-1} + \frac{1}{2} z^n + \dots)^2 \quad \text{für } n > 2,$$

daher

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \dots, \quad \lambda_{n-2} = 0, \quad \lambda_{n-1} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_n = \frac{1}{2}.$$

Ferner ist für $|z| < 1$

$$\left| 1 + \frac{1}{2} z^{n-1} + \frac{1}{2} z^n \right| > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

also

$$1 + \frac{1}{2} z^{n-1} + \frac{1}{2} z^n \neq 0 \text{ für } |z| < 1.$$

Aus Satz I' folgt somit der

Satz III. *Unter der Voraussetzung (6) ist*

$$|a_r + a_{r+p} + a_{r+np}| \leq \frac{3}{2} \quad (n > 2, \quad r < p),$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r \equiv e^{\gamma i} \cdot z^r \frac{1 + z^p + 2z^{np}}{2 + z^{(n-1)p} + z^{np}}.$$

§ 9

Ich benutze jetzt den Landauschen Ideengang, um eine auf Polynome bezügliche Extremalaufgabe zu lösen.

Es sei

$$f_m(z) = \sum_{\nu=0}^m a_\nu z^\nu$$

ein Polynom von genau m -tem Grade ($a_m \neq 0$), und

$$\left| \sum_{\nu=0}^m a_\nu z^\nu \right| \leq 1 \text{ für } |z| \leq 1.$$

Man findet leicht (vgl. Formel (C), S. 7)

$$\sum_{\nu=1}^m \nu a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int f_m(z) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \dots + \frac{m}{z^{m+1}} \right) dz,$$

und hieraus

$$\sum_{\nu=1}^m \nu a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_m(z)}{z^2} \left(1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^{m-1}} \right)^2 dz,$$

denn es ist jetzt

$$\int \frac{f_m(z)}{z^\nu} dz = 0 \text{ für } \nu > m + 1.$$

Hieraus erhält man für $z = e^{\vartheta i}$:

$$\sum_{\nu=1}^m \nu a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_m(e^{\vartheta i})}{e^{\vartheta i}} (1 + e^{-\vartheta i} + \dots + e^{-(m-1)\vartheta i})^2 d\vartheta,$$

also

$$(29) \quad \left| \sum_{\nu=1}^m \nu a_{\nu} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + e^{-\vartheta i} + \dots + e^{-(m-1)\vartheta i}|^2 d\vartheta = m,$$

und Gleichheit gilt nur, wenn $|f_m(e^{\vartheta i})| \equiv 1$ und

$$\frac{f_m(e^{\vartheta i})}{e^{\vartheta i}} (1 + e^{-\vartheta i} + \dots + e^{-(m-1)\vartheta i})^2$$

konstante Amplitude hat, also von der Gestalt ist

$$\frac{f_m(e^{\vartheta i})}{e^{\vartheta i}} (1 + e^{-\vartheta i} + \dots + e^{-(m-1)\vartheta i})^2 = e^{r i} g(e^{\vartheta i}),$$

wo

$$g(e^{\vartheta i}) \geq 0 \text{ für } 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

Dann ist aber $g(e^{\vartheta i}) = |1 + e^{-\vartheta i} + \dots + e^{-(m-1)\vartheta i}|^2$.

Hieraus folgt leicht $f_m(e^{\vartheta i}) = e^{r i} \cdot e^{m \vartheta i}$,

oder

$$f_m(z) = e^{r i} \cdot z^m.$$

Aus (29) erhält man nun sofort $\left| \sum_{\nu=1}^m \nu a_{\nu} z^{\nu} \right| \leq m$ für $|z| \leq 1$,

und hieraus $|f'_m(z)| \leq m$ für $|z| \leq 1^{12}$.

§ 10.

Ich frage nun nach der genauen oberen Schranke von

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n|$$

für alle Potenzreihen, die der Bedingung (6) genügen. Es ist also A_n so zu bestimmen, daß

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq A_n,$$

und daß hier A_n durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Wollten wir unsere Methode anwenden, so müßten wir zunächst die ersten $n+1$ Koeffizienten der Reihenentwicklung

$$[n + (n-1)x + \dots + x^{n-1}]^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu} x^{\nu}$$

bestimmen. Für beliebiges n scheint dies recht schwierig zu sein; für $n=2, 3, 4$ kommt man leicht zum Ziele und erhält so die Werte von A_2, A_3, A_4 . Ich will hier A_n zwischen zwei Schranken einschließen.

¹²⁾ Auf anderem Wege hat schon Herr M. Rieß dieses Resultat abgeleitet; vgl. seine Arbeit, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver., 23 (1914), S. 354—368 (S. 357).

Nach (2) ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu} \right| \leq 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \dots 2\nu} \right)^2 = G_n^{13}),$$

und hieraus folgt durch Anwendung von (29):

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \leq G_n,$$

also

$$A_n \leq nG_n.$$

Andererseits ist offenbar

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = (n+1) \left(s_n - \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \right),$$

also wird für die Funktion (man vgl. die Einleitung)

$$f(z) = \frac{z^n \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} z^{\nu}}$$

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| > (n+1)(G_n - 1);$$

es ist also zusammenfassend

$$(30) \quad (n+1)(G_n - 1) \leq A_n \leq nG_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

¹³⁾ Die Konstanten G_n haben offenbar für die Potenzreihe dieselbe Bedeutung wie die Lebesgueschen Konstanten

$$e_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \right| d\vartheta$$

für die Fourierreihe. Für e_n gab Herr Fejér (*Journal für Mathematik* 146 (1915), S. 56) die Darstellung

$$e_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + z + z^2 + \dots + z^{2n} \right|_{z=e^{i\vartheta}} d\vartheta;$$

ich verweise hier darauf, daß für G_n eine analoge Darstellung existiert. Setzt man

$$\left(\sum_{\nu=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-z)^{\nu} \right)^2 = 1 + z + \dots + z^n + \alpha_1 z^{n+1} + \dots + \alpha_n z^{2n},$$

so ist offenbar

$$G_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + z + \dots + z^n + \alpha_1 z^{n+1} + \dots + \alpha_n z^{2n} \right|_{z=e^{i\vartheta}} d\vartheta.$$

Hieraus erhält man leicht eine asymptotische Abschätzung von A_n . Bekanntlich¹⁴⁾ ist

$$G_n \simeq \frac{1}{\pi} \log n, \quad \left(\text{d. h. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{\log n} = \frac{1}{\pi} \right)$$

also aus (30)

$$A_n \simeq \frac{1}{\pi} n \log n.$$

Schlußbemerkung. Durch die Substitutionen $z = Rx$, $a, R^v = Mc$, lassen sich unsere Sätze unmittelbar auf Potenzreihen $\sum a_n z^n$ übertragen, die im Kreise $|z| < R$ absolut unter der Schranke M liegen.

¹⁴⁾ Man vgl. Landau, a. a. O. ¹⁾, S. 23.

(Eingegangen am 3. August 1917.)